I COMPETENCIA MATEMATICA ERNESTO PAENZA

28 de agosto de 1986

EJERCICIOS

Problema 1.

Dos autos recorren un circuito a la misma velocidad constante, a razón de 1 vuelta por hora. El primero sale del punto de largada en el instante $t = 0$ y el segundo sale (del mismo punto) en algún instante $t = T > 0$. Demostrar que a partir de la largada del segundo auto, la cantidad de tiempo durante el cual el primero lleva completadas el doble de vueltas que el segundo es de exactamente una hora.

Problema 2.

Dado $n \in \mathbb{N}$, sea P el polinomio de grado n que verifica las igualdades:

$$P(k) = \frac{k}{k+1} \qquad , \qquad 0 \leqslant k \leqslant n$$

Calcular $P(n+1)$.

Problema 3.

Sea $0 < \varepsilon < 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos el polinomio:

$$(x+y)^n(x^2 - (2-\varepsilon)x.y + y^2)$$

a) Demostrar que para n suficientemente grande todos sus coeficientes son positivos.

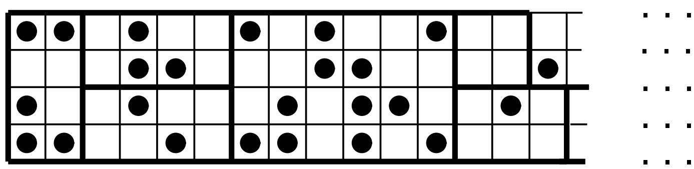
b) Si $\varepsilon = 0.002$ ¿cuál es el menor valor posible de n para el cual todos los coeficientes son positivos?

Problema 4.

Se tiene un tablero cuadriculado de $4 \times n$, donde cada casilla se blanca o negra. Encontrar (con demostración) el mínimo n con la siguiente propiedad:

Para toda posible coloración del tablero, existe un rectángulo –como mínimo de 2×2 casilleros– con los 4 vértices del mismo color.

Ejemplos de rectángulos de este tipo:



Problema 5.

Sea $S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ un conjunto cerrado y acotado. Sea $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de S con la siguiente propiedad:

$$d(P_n, P_{n+1}) = \max\{d(P_n, P) \ : \ P \in S\}$$

y sea $d_n = d(P_n, P_{n+1})$.

Claramente, se tiene que $d_1 \leqslant d_2 \leqslant d_3 \leqslant \ldots \leqslant \delta$, donde δ es el diámetro de S. (Recordar que δ es la máxima distancia posible entre dos puntos de S, es decir $\delta = \max\{d(P, Q) \ / \ P \in S \ , \ Q \in S\}$).

Sea $d = \lim\limits_{n\to\infty} d_n \leqslant \delta$.

¿Es posible que $d < \delta$? En caso afirmativo, dar un ejemplo y probar que lo es. En caso negativo, demostrar que no puede ser.

Problema 6.

Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de funciones reales definida por:

$$\begin{aligned} &f_0(x) = e^x \\ &f_{n+1}(x) = x.f_n'(x) \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(1)}{n!} = e^e$.

Problema 7.

Calcular $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + (\operatorname{tg} x)^r}$, donde r es un número real no negativo cualquiera.

Problema 8.

Dadas n ciudades unidas por una red vial con la siguientes características:

a) *toda ruta es de mano única*

b) *dado cualquier par de ciudades hay una única ruta que las une, sin pasar por ninguna otra ciudad.*

Pruebe que siempre hay un camino que pasa por todas las ciudades, una única vez.

Composición tipográfica: $\LaTeX\ 2_\varepsilon$ (http://www.miktex.org)
Gráficos: Tkpaint (http://www.netanya.ac.il/~samy/tkpaint.html)