

Una introducción a la teoría de wavelets y marcos con aplicaciones

Carlos Cabrelli



Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Métodos Geométricos y Analíticos para Ecuaciones en Derivadas
Parciales, Diciembre 2006

Prefacio

Estas notas corresponden al curso ofrecido en la escuela: "Métodos Geométricos y Analíticos para Ecuaciones en Derivadas Parciales", organizada por Luis Caffarelli y Gustavo Corach en el CEFIMAS, Buenos Aires en una calurosa semana de Diciembre del 2006.

El curso consta de cuatro clases e intenta ser una breve introducción a la teoría de wavelets, marcos y sus aplicaciones. Debido a la corta duración muchos temas centrales no han sido tratados. El objetivo es ofrecer una vision general del tema y presentar algunas de las preguntas que motivaron esta hermosa teoría. Muchos de los gráficos de este curso pertenecen al libro [Mal98] de Stephane Mallat a quien agradecemos que los haya puesto para uso público en internet. Tambien quiero agradecer a Ursula Molter y Ezequiel Rela por su ayuda con el tipeo y la parte gráfica de la presentación.

Contenido I

1 Clase I

- El plano Tiempo-Frecuencia
- Principio de Incertidumbre de Heisenberg
- Transformada de Fourier de Corta Duración
- El grupo afín y el grupo de Heisenberg

2 Clase II

- El Problema de la discretización
- Wavelet de Haar, wavelets ortogonales
- El algoritmo de Burt y Adelson
- Análisis de Multiresolución

3 Clase III

- Teoría de Marcos
 - Marco Dual
 - Operador de Marco
 - Ejemplos
- Bases de Riesz

Contenido II

- Marcos con Estructura
 - Marcos de Fourier
 - Densidad de Beurling

4 Clase IV

- Marcos con Estructura (cont.)
 - Marcos de Gabor (Weyl-Heisenberg)
 - Balian-Low
- Esquema general de construcción de marcos
 - Wavelet de Shannon
 - Ingredientes para la construcción
 - Teorema General
- Marcos de Traslaciones
- El problema del Muestreo o Sampling

5 Referencias Generales

Concentración o localización de una función

Sea ψ una función en $L^2(\mathbb{R})$, $\psi \neq 0$.

Definimos el **centro** (o valor medio) de ψ , a la cantidad

$$t_0 = t_0(\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \frac{|\psi(t)|^2}{\|\psi\|_2^2} dt \quad \text{si es finito}$$

y el **radio** de ψ , al valor

$$\sigma = \sigma(\psi) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_0)^2 \frac{|\psi(t)|^2}{\|\psi\|_2^2} dt \right)^{1/2}.$$

El intervalo $I_\psi = [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma]$ es el **intervalo de concentración** de ψ .

El centro y radio de $\hat{\psi}$ serán notados por w_0 y $\hat{\sigma}$ respectivamente.

Una **ventana** es una función ψ tal que los intervalos I_ψ y

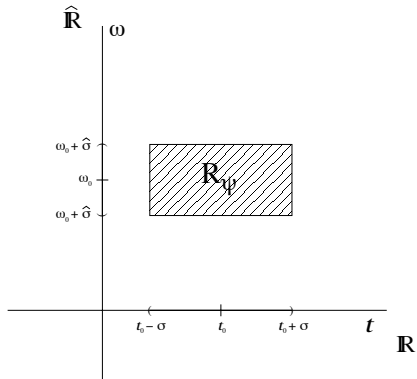
$I_{\hat{\psi}} = [w_0 - \hat{\sigma}, w_0 + \hat{\sigma}]$ son finitos.

El plano Tiempo Frecuencia I

Cada ventana determina un intervalo en el plano $\mathbb{R} \times \hat{\mathbb{R}}$ cuyo área es

$$|R_\psi| = |I_\psi| |I_{\hat{\psi}}| = 4\sigma\hat{\sigma}.$$

R_ψ es la localización en el plano tiempo-frecuencia (t, w) .



El plano Tiempo-Frecuencia II

Dada $f \in L^2$,

$$a_R = \langle f, \psi \rangle = \langle \hat{f}, \hat{\psi} \rangle$$

O sea, a_R da información sobre f alrededor de x_0 y sobre las frecuencias de f alrededor de w_0 .

O sea a_R da información de f alrededor del punto (t_0, w_0) en el plano tiempo-frecuencia.

El *Principio de Incertidumbre de Heisenberg* da una limitación a cuán bien puede ser localizada una función en tiempo y frecuencia.

Principio de Incertidumbre de Heisenberg

Sea ψ en L^2 y sean σ y $\hat{\sigma}$ sus radios en tiempo y en frecuencia. Entonces

$$\sigma \hat{\sigma} \geq \frac{1}{4\pi}.$$

La igualdad vale sii ψ es un múltiplo de $e^{2\pi b(t-a)} e^{-\pi(t-a)^2/c}$.

O sea el área de R_ψ está limitada, $|R_\psi| \geq \frac{1}{\pi}$.

Transformada de Fourier de Corta duración

Con objeto de obtener un análisis de Fourier más localizado, Gabor propuso truncar las funciones bajo análisis con una función ventana. Supongamos que g está bien localizada en tiempo y frecuencia. Para cada $f \in L^2$ definimos la transformada

$$f \mapsto \int (f(t)g(t-b))e^{-2\pi i t w} dt = Gf(b, w).$$

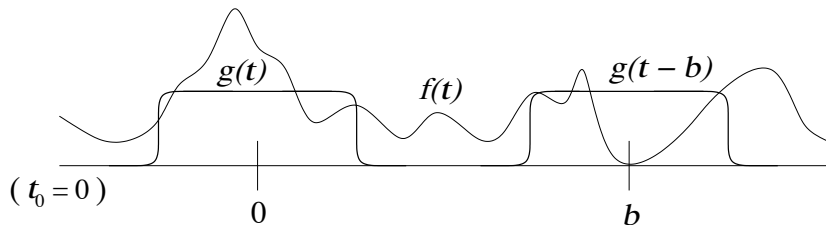


Figura: Transformada de Gabor

Transformada de Gabor

La transformada $G : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R} \times \hat{\mathbb{R}})$ es una isometría invertible sobre su rango, cualquiera sea la ventana $g \in L^2, g \neq 0$.

Además vale la fórmula de inversión,

$$f = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \langle f, g_{wb} \rangle g_{wb} db dw, \quad f \in L^2,$$

en sentido debil.

Otra forma de ver la transformada de Gabor

Considérese la familia

$$\{g_{bw}(x) = g(x - b)e^{-2\pi iwx} : b, w \in \mathbb{R}\}$$

Luego $Gf(b, w) = \langle f, g_{bw} \rangle$.

Como

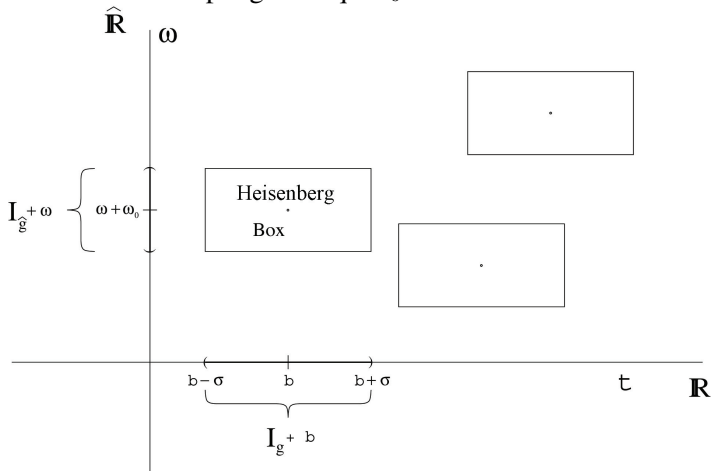
$$g_{bw} = M_w t_b g ,$$

la función g_{bw} es la trasladada de g en tiempo por b y de su transformada por w .

Luego, como $\langle f, g_{bw} \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g}_{bw} \rangle$ para cada (b, w) , podemos pensar que $Gf(b, w)$ da información sobre las frecuencias próximas a $w_0 + w$ que intervienen en f en un entorno de $t_0 + b$.

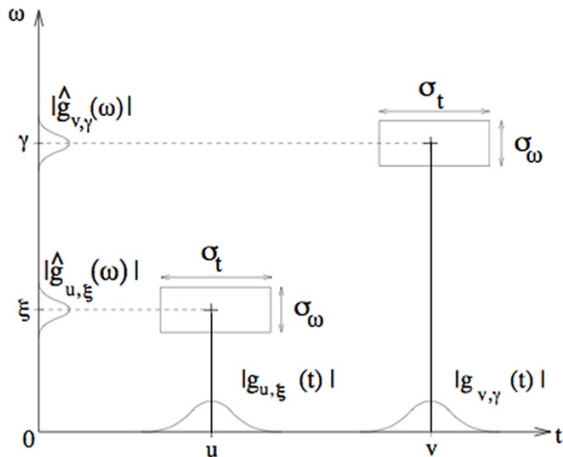
Transformada de Gabor

Gráficamente: supongamos que $t_0 = 0$.



Los rectángulos se trasladan con b y w sin modificarse.

Transformada de Gabor



Dos átomos de gabor en (u, ξ) y en (v, γ) .

La transformada wavelet continua I

En la transformada wavelet se elige un $\psi \in L^2$ y se genera la familia

$$\{\psi_{ab}(t) = \frac{1}{|a|^{1/2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) : a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$$

$$Wf(a, b) = \int f(t) \frac{1}{|a|^{1/2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

Las modulaciones en el caso de Gabor, han sido reemplazadas por dilataciones.

La transformada wavelet continua II

Nuevamente tenemos

$$Wf(a, b) = \langle f, \psi_{ab} \rangle = \langle \hat{f}, \hat{\psi}_{ab} \rangle$$

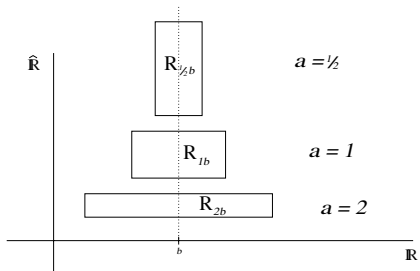
$$\hat{\psi}_{ab}(w) = |a|^{1/2} \hat{\psi}(aw) e^{-2\pi i wb}.$$

Además $I_{\psi_{ab}} = aI_{\psi} + b$

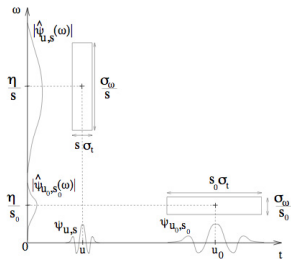
$$I_{\hat{\psi}_{ab}} = \frac{1}{a} I_{\hat{\psi}}$$

O sea, distinto que en el caso de Gabor, el rectángulo $R_{ab} = I_{\psi_{ab}} \times I_{\hat{\psi}_{ab}}$ cambia de forma con a y b , pero no de área!!

Transformada wavelet continua III



Wavelets boxes en distintas escalas.



La transformada wavelet no está bien definida para cualquier $\psi \in L^2$.
La condición de admisibilidad es

$$c_\psi = \int \frac{|\hat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw < +\infty.$$

Bajo esta condición vale la fórmula de inversión:

$$f = \int \langle f, \psi_{ab} \rangle \psi_{ab} \frac{da}{|a|^2} db \quad \forall f \in L^2$$

y la aplicación $f \mapsto Wf$, con $Wf(a, b) = \langle f, \psi_{ab} \rangle$ es una isometría de $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \frac{da}{|a|^2} db)$.

El grupo afín y el grupo de Heisenberg

Las transformadas wavelet y de Gabor, pueden verse como representaciones del grupo afín y del grupo de Heisenberg respectivamente.

Grupo afín (Wavelets)

$$A = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$$

$$(a, b) * (a', b') = (aa', b + ab')$$

$$\text{Si } \psi \in L^2, \text{ sea } \psi_{ab}(x) = \frac{1}{|a|^{1/2}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Representación del grupo afín

Sea π la representación

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow \cup(L^2(\mathbb{R})) && \text{(operadores unitarios de } L^2(\mathbb{R})) \\ (a, b) &\longmapsto \pi(a, b), && \pi(a, b)\psi = \psi_{ab}. \end{aligned}$$

La condición $\int_{\mathbb{R}^*} \frac{|\hat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw = 1$ da lugar a la fórmula de inversión (Conocida por fórmula de Calderón (1964))

$$f = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^*} \langle f, \psi_{ab} \rangle \psi_{ab} \frac{da}{|a|^2} db$$

en sentido débil, o sea la transformada wavelet $f \mapsto W_{\psi}f$,

$W_{\psi}f(a, b) = \langle f, \psi_{ab} \rangle$ es una isometría de $L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \frac{da}{|a|^2} db)$

donde $\frac{da}{|a|^2} db$ es la medida de Haar en el grupo A .

Grupo de Heisenberg (Gabor)

$$H = (T \times \mathbb{R} \times \hat{\mathbb{R}})$$

$$(t_1, w_1, b_1) * (t_2, w_2, b_2) = (t_1 t_2 e^{2\pi i b_1 w_2}, w_1 + w_2, b_1 + b_2)$$

Si $g \in L^2$, sea $g_{wb}(x) = e^{2\pi i wx} g(x - b)$.

Sea π la representación de $H' \subset H$, $H' = (\{1\} \times \mathbb{R} \times \hat{\mathbb{R}})$

$$\begin{aligned} H' &\longrightarrow U(L^2(\mathbb{R})) \\ (a, b) &\longrightarrow \pi(w, b) \quad \pi(w, b)g = g_{wb} \end{aligned}$$

Cualquiera sea la g (cualquier g es admisible) vale la formula de inversión:

$$f = \int_{\mathbb{R}} \int_{\hat{\mathbb{R}}} \langle f, g_{wb} \rangle g_{wb} dw db$$

en sentido débil. O sea $f \mapsto G_g f$, $G_g f(w, b) = \langle f, \pi(w, b)g \rangle$ es una isometría de $L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R} \times \hat{\mathbb{R}}, dw db)$ donde $dt dw db$ es la medida de Haar (derecha e izquierda ya que es unimodular) de H' .

Caso General

Sea G un grupo localmente compacto, μ la medida de Haar a izquierda. H un espacio de Hilbert.

$\pi : G \longrightarrow H$ $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$ una representación. Si existe $g \in H, g \neq 0$ tal que

$$\int_G |\langle g, \pi(x)g \rangle|^2 d\mu(x) < +\infty \quad \text{Condición de admisibilidad}$$

Entonces vale la fórmula (en sentido débil)

$$f = \int_G \langle f, \pi(x)g \rangle \pi(x)g d\mu(x) \quad \forall f \in H.$$

O lo que es equivalente,

$$f \mapsto V_g(f) \quad \text{donde} \quad V_g f(x) = \langle f, \pi(x)g \rangle$$

es una isometría de $H \rightarrow L^2(G, \mu)$.

V_g se suele denominar la transformada wavelet generalizada. (El problema aquí es encontrar elementos admisibles).

Clase II

-

El problema de la discretización.

Wavelets ortogonales.

El algoritmo de Burt y Adelson en Procesamiento de Imágenes.

Concepto de Análisis de Multirresolución.

El Problema de la discretización

La inversibilidad de las transformadas wavelet y Gabor, implica que cada función de $L^2(\mathbb{R})$ pueda ser recuperada a partir de su transformada. Debido a la continuidad de estos operadores, hay estabilidad en la reconstrucción.

El problema de la discretización, o muestreo, es el de ver si existe una cantidad discreta de elementos $X = \{x_k\}$, de forma tal que cada $f \in L^2$ pueda recuperarse a partir de los valores de su transformada en X .

O sea, por ejemplo en el caso de wavelets, nos preguntamos si existe un conjunto $X = (a_k, b_k)$ tal que el operador $f \mapsto \{Wf(a_k, b_k)\}_{(a_k, b_k) \in X}$ sea inversible y continuo de $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \ell^2(X)$.

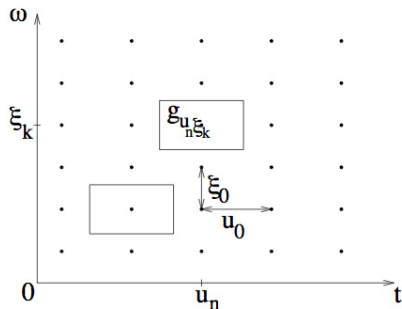
La situación ideal sería encontrar $\{(a_k, b_k)\}_k$ tal que valiese la fórmula de inversión:

$$f = \sum_k Wf(a_k, b_k) \psi_{a_k, b_k} = \sum_k \langle f, \psi_{a_k, b_k} \rangle \psi_{a_k, b_k}$$

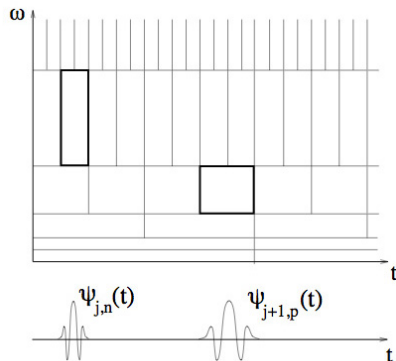
Discretización (Caso afín)

Debido a la dilatación, es más adecuado que las traslaciones dependan de la dilatación.

Caso Gabor



Caso afín



Wavelets discretas

Consideramos la grilla $\{(2^j, 2^{-j}k) : k, j \in \mathbb{Z}\}$

Esta grilla da la colección de funciones:

$$\psi_{jk}(x) = 2^{j/2} \psi \left(2^j \left(x - \frac{k}{2^j} \right) \right) = 2^{j/2} \psi (2^j x - k) = t_{\frac{k}{2^j}} D_{2^j} \psi(x).$$

Problema: Encontrar ψ tal que $\{\psi_{jk} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ sea b.o.n. de L^2 ?

Ejemplo: Wavelet de Haar



$$H(x) = \chi_{[0,1/2]}(x) - \chi_{[1/2,1]}(x)$$

$\{H_{jk}\}$ es una b.o.n. de $L^2(\mathbb{R})$.

El algoritmo de Burt y Adelson y Análisis de Multiresolución

Sea I_0 una imagen de $2^N \times 2^N$ píxeles.

$$\varphi = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

I_1 es una imagen de $2^{N-1} \times 2^{N-1}$ píxeles que se obtiene de I_0 , reemplazando cada segundo píxel por su promedio con φ .

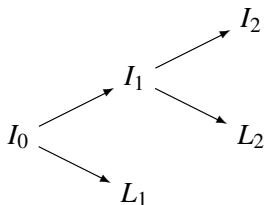
Luego se interpola I_1 para llevarla al tamaño de $2^N \times 2^N$ para obtener \tilde{I}_1 y $L_1 = I_0 - \tilde{I}_1$. O sea $I_0 = L_1 + \tilde{I}_1$.

\tilde{I}_1 es una versión de I_0 a menor resolución. L_1 representa los detalles que se han perdido en la imagen al pasar de I_0 a I_1 .

Reducción y Detalles

Luego se itera el procedimiento con I_1 para obtener I_2 y L_2 tales que $I_1 = L_2 + \tilde{I}_2$.

Observemos que con (L_1, L_2, I_2) puede reconstruirse la imagen original I_0 .



Lo que da la descomposición final $I_0 \sim (L_1, L_2, \dots, L_{N-1}, I_{N-1})$ donde L_k representan los detalles que se han perdido al pasar del nivel $k - 1$ al k .

Tres iteraciones del algoritmo sobre la imagen de Lena.



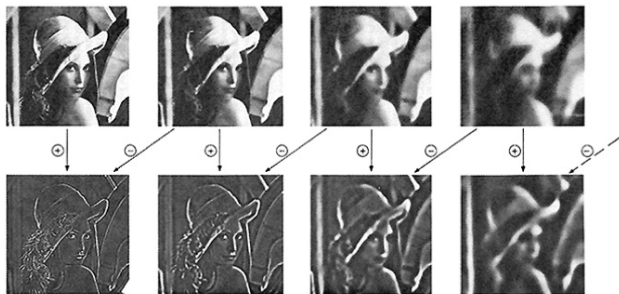


Fig 5. First four levels of the Gaussian and Laplacian pyramid. Gaussian images, upper row, were obtained by expanding pyramid arrays (Fig. 4) through Gaussian interpolation. Each level of the Laplacian pyramid is the difference between the corresponding and next higher levels of the Gaussian pyramid.

BURT AND ADELSON: LAPLACIAN PYRAMID

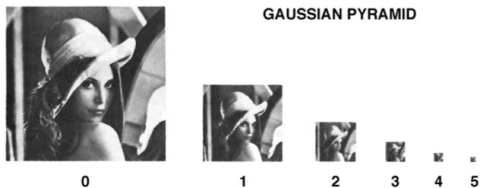


Fig. 4. First six levels of the Gaussian pyramid for the "Lady" image. The original image, level 0, measures 257 by 257 pixels and each higher level array is roughly half the dimensions of its predecessor. Thus, level 5 measures just 9 by 9 pixels.

Análisis de Multiresolución (AMR)

Un AMR es una sucesión $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ de subespacios cerrados de L^2 , tales que

- 1 $V_j \subset V_{j+1}$
- 2 $\bigcap V_j = \{0\}, \overline{\bigcup V_j} = L^2$
- 3 $D_2 V_j = V_{j+1}, t_{k/2^j} V_j \subset V_j$
- 4 $\exists \varphi \in V_0$ tal que $\{\varphi(x - k)\}$ b.o.n. de V_0 . φ se llama función de escala.

Por (3) $\{2^{j/2} \varphi(2^j x - k)\}$ es b.o.n. de V_j . Además

$$\varphi \in V_0 \subset V_1 \implies \varphi(x) = \sum c_k \varphi(2x - k), c_k \in \ell^2(\mathbb{Z}).$$

Esta ecuación se denomina ecuación *de refinamiento* o *de escala*.

Existencia

Teorema (S. Mallat- Y. Meyer)

Si $\{V_j, \varphi\}$ es un AMR, entonces la función

$$\psi(x) = \sum_k (-1)^k c_{1-k} \varphi(2x - k)$$

es una wavelet, i.e. $\{\psi_{jk}(x)\} = \{2^{j/2} \psi(2^j x - k)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ es una b.o.n. de L^2 .

Además, si $W_0 = \overline{\text{gen}\{\psi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}}$ entonces

$V_1 = V_0 \oplus W_0$ y $W_0 \perp V_0$,

lo que implica que $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ y $V_j \perp W_j$, donde $W_j = D_j W_0$.

Esbozo de Demostración

Sea $(\{V_j\}, \varphi)$ un AMR. Entonces esta estructura implica la siguiente descomposición ortogonal del espacio:

$$L^2(\mathbb{R}) = \cdots \oplus W_{-j} \oplus \cdots \oplus W_0 \oplus \cdots \oplus W_j \oplus \cdots$$

Como $V_1 = V_0 \oplus W_0$, basta entonces encontrar $\psi \in V_1$ tal que

- 1 $\psi \perp V_0$
- 2 $\{t_k \psi\}$ son ortonormales
- 3 $\{t_k \psi\}$ completos en $V_1 \ominus V_0 = W_0$.

Si $\{t_k \psi\}$ es una b.o.n. de W_0 entonces $\{\psi_{jk}(x) : k \in \mathbb{Z}\}$ es b.o.n. de W_j y como

$$L^2 = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}}^\perp W_j \implies \psi \text{ es una wavelet.}$$

Demo (continuación)

- $f \in V_1 \iff f(x) = \sqrt{2} \sum a_k \varphi(2x - k) \quad \text{con} \quad \{a_k\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$
 $\iff \hat{f}(w) = m_f(w/2) \hat{\varphi}(w/2) \quad \text{con} \quad m_f \in L^2(0, 1)$
- f tiene translaciones ortonormales $\iff \sum |\hat{f}(w + k)|^2 = 1$ p.p.

Demo (continuación)

sea $\hat{\varphi}(w) = m_{\varphi}(w/2)\hat{\varphi}(w/2)$

Se quiere encontrar $m_{\psi} \in L^2(0, 1)$
tal que $\psi(w) = m_{\psi}(w/2)\hat{\varphi}(w/2)$
satisfaciendo **1, 2, 3**

$$1) \psi \perp V_0 \implies m_{\varphi}(w)\overline{m_{\psi}(w)} + m_{\varphi}(w + 1/2)\overline{m_{\psi}(w + 1/2)} = 0 \text{ p.p.}$$

$$2) t_k \psi \perp t_s \psi \implies |m_{\psi}(w)|^2 + |m_{\psi}(w + 1/2)|^2 = 1 \text{ p.p.}$$

Más la hipótesis $|m_{\varphi}(w)|^2 + |m_{\varphi}(w + 1/2)|^2 = 1 \text{ p.p.}$

implican que la matriz

$$\begin{bmatrix} m_{\varphi}(w) & m_{\varphi}(w + 1/2) \\ m_{\psi}(w) & m_{\psi}(w + 1/2) \end{bmatrix} \text{ sea unitaria p.p.}$$

Demo (continuación)

$$m_\psi(w) = e^{2\pi iw} \overline{m_\varphi(w + 1/2)} \quad \text{o sea}$$
$$\hat{\psi}(w) = e^{\pi iw} m_\varphi(w/2 + 1/2) \hat{\varphi}(w/2)$$

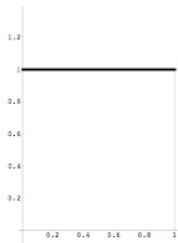
Definición de ψ

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{k+1} c_{-(k+1)} \varphi(2x - k)$$

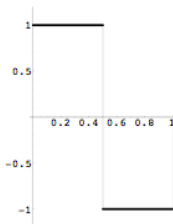
Se prueba que $\{t_k \psi\}$ es una b.o.n. de W_0

Ejemplo: Caso Haar

$\varphi = \chi_{[0,1]}$ es la función de escala.



scaling function ϕ



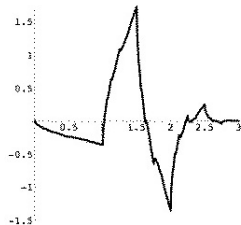
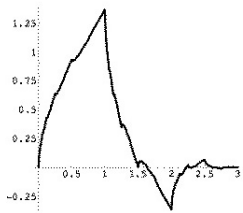
wavelet function ψ

$$\chi_{[0,1]}(x) = \chi_{[0,1]}(2x) + \chi_{[0,1]}(2x - 1) \quad c_0 = 1, c_1 = 1$$

$$H(x) = \chi_{[0,1]}(2x) - \chi_{[0,1]}(2x - 1)$$

Una wavelet continua de soporte compacto.

Coeficientes: $\frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$, $\frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$, $\frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$, $\frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$

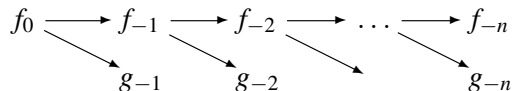


AMR y el algoritmo de Burt - Adelson

Luego, si ψ es la wavelet obtenida a través de un análisis de multirresolución con función de escala φ , se tiene la descomposición

$$f = P_{V_{j_0}} f + \sum_{j \geq j_0} P_{W_j} f.$$

Algoritmo de Burt y Adelson con wavelets: Supongamos que $f_0 \in V_0$, luego



donde

$$f_j = P_{V_j} f = \sum_k \langle f, \varphi_{jk} \rangle \varphi_{jk}$$

$$g_j = P_{W_j} f = \sum_k \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk}$$

Invertibilidad de W

Para invertibilidad (sobre el rango) y continuidad del operador

$$\begin{aligned} f &\longmapsto^W \{Wf(a_k, b_k)\}_{(a_k, b_k) \in X} \\ L^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \ell^2(X), \end{aligned}$$

es suficiente que se satisfagan las desigualdades

$$A\|f\|^2 \leq \sum_k |\langle f, \psi_{a_k b_k} \rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \quad \forall f \in L^2. \quad (1)$$

Luego en el caso afín la pregunta es si existe $\psi \in L^2$ y un conjunto discreto X tales que se satisface (1)

Teoría de Marcos

Sea H un espacio de Hilbert separable.

Definición

Una sucesión $\{v_k\} \subset H$ se dice un marco de H , si existen constantes positivas $0 < A \leq B < +\infty$ tales que

$$A\|w\|^2 \leq \sum_k |\langle w, v_k \rangle|^2 \leq B\|w\|^2 \quad \forall w \in H. \quad (2)$$

Las constantes A y B óptimas, se denominan las cotas del marco. Si $A = B$ el marco se dice *ajustado*.

Una *sucesión marco* es un marco del subespacio que genera.

Equivalencia de Definiciones

Teorema

Sea H Hilbert separable. $X = \{v_k\}_{k \in I} \subset H$ un conjunto a lo sumo numerable de vectores. Son equivalentes

- ① X es un marco de H
- ② Existe $T : \ell^2(I) \rightarrow H$, acotado y suryectivo tal que $T(e_j) = v_j$ donde $\{e_j\}$ es la base canónica de $\ell^2(I)$.

Si $\{f_n\} \subset H$ es un marco, entonces existe otro marco $\{\tilde{f}_n\}$ llamado *marco dual* con la propiedad de que $\forall f \in H$

$$f = \sum_k \langle f, \tilde{f}_n \rangle f_n$$

donde las series convergen incondicionalmente en la norma de H .

Un marco $\{f_n\}$ puede tener varios marcos duales lo que da diferentes representaciones para un vector del espacio.

Marco dual canónico

Sea $T : H \longrightarrow H$ el *operador de marco*, o sea

$$Tf = \sum_k \langle f, f_k \rangle f_k$$

T es un operador autoadjunto (positivo) e inversible (esto es consecuencia de la condición de marco). Luego $\tilde{f}_n = T^{-1}f_n$ es un marco llamado *marco dual canónico* y satisface

$$f = T(T^{-1}f) = \sum_n \langle T^{-1}f, f_n \rangle f_n = \sum_n \langle f, T^{-1}f_n \rangle f_n = \sum_n \langle f, \tilde{f}_n \rangle f_n$$

o sea $\{\tilde{f}_n\}$ es un marco dual. La representación de cada vector f del espacio en este marco, es la más económica: Si $a_n = \langle f, \tilde{f}_n \rangle$ y $b = \{b_n\} \in \ell^2$ es tal que $f = \sum a_n f_n = \sum b_n f_n$ entonces

$$\|b\|_2^2 = \|a\|_2^2 + \|b - a\|_2^2.$$

Ejemplos

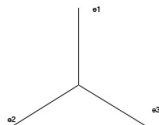
- ① Si $\dim(H) < +\infty$, $\{f_k\}_{k=1}^N$ es un marco, $\iff \{f_k\}_{k=1}^N$ es un conjunto de generadores.

En \mathbb{R}^2 consideremos los vectores

$$e_1 = (0, 1) \quad e_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad e_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Si $v \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$\sum_{i=1}^3 |\langle v, e_i \rangle|^2 = \frac{3}{2} \|v\|^2.$$



$\{e_1, e_2, e_3\}$ es un marco ajustado ($A = B = 3/2$) de vectores de norma constante.

Ejemplos (cont.)

- 2 Sea $\{e_k\}_k \subset H$ una base ortonormal. Las siguientes sucesiones de vectores son marcos ajustados con $A = B = 1$ (Normalizados).

$$\{e_1, 0, e_2, 0, \dots\}, \quad \{e_1/\sqrt{2}, e_1/\sqrt{2}, e_2/\sqrt{2}, e_2/\sqrt{2}, \dots\},$$

$$\{e_1, e_2/\sqrt{2}, e_2/\sqrt{2}, e_3/\sqrt{3}, e_3/\sqrt{3}, e_3/\sqrt{3}, \dots\} \quad \text{Note que } \|f_n\| \rightarrow 0.$$

Proposición

Sea $\{f_n\}$ un marco ajustado con constante 1. Entonces $\|f_n\| \leq 1, \forall n$ y $\|f_n\| = 1 \forall n \iff \{f_n\}$ es ortonormal.

En los marcos ajustados puede haber varios desarrollos para una misma función, pero lo importante es que el dual canónico es un múltiplo del marco. O sea, para cada $f \in H$ se satisface

$$f = 1/B \sum \langle f, f_n \rangle f_n \quad \text{y} \quad \sum |\langle f, f_n \rangle|^2 = B \|f\|^2.$$

Bases de Riesz

Si un marco deja de ser marco al remover cualquiera de sus elementos, se dice *exacto*. Un marco es exacto si y solo si es una *base de Riesz*. Una base de Riesz, es una base que se obtiene de una base ortonormal por un operador acotado e inversible.

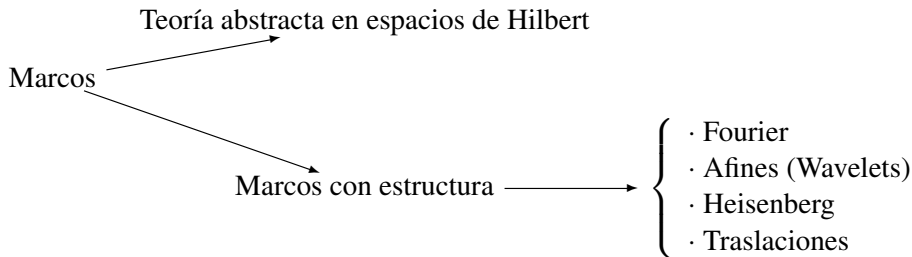
Las bases de Riesz son *bases*, o sea existe una única escritura $f = \sum c_k f_k$ para cada $f \in H$, o sea existe un único dual que también es base de Riesz y es biortogonal (i.e. $\langle f_n, \tilde{f}_n \rangle = \delta_{nm}$).

En cada Hilbert separable H existen marcos ajustados acotados en norma que no contienen ninguna base de Schauder de H !!

Conjetura: Todo marco acotado en norma es union finita de de sucesiones de Riesz.

Marcos con Estructura

La teoría de marcos se puede dividir en dos ramas importantes:



En lo que sigue haremos una síntesis de algunos resultados en estos cuatro grupos. Se verá sólo la teoría L^2 .

(Existe la noción de marco de un espacio de Banach).

Marcos de Fourier

Sea $I = [0, 1)$ y $\Lambda = \{\lambda_n\}$ una sucesión en \mathbb{R} . Sea $e_{\lambda_n}(t) = e^{-2\pi i \lambda_n t}$.

Se quiere saber para que conjuntos $\Lambda \subset \mathbb{R}$, la familia $\{e_{\lambda_n} : \lambda_n \in \Lambda\}$ es un marco de $L^2([0, 1))$.

Ejemplo

Si $\lambda_n = n \implies \{e_{\lambda_n}\}$ es una base ortonormal de $L^2([0, 1))$.

Kadec-1/4

Si $|\lambda_n - n| \leq L < 1/4, n \in \mathbb{Z}$ entonces $\{e_{\lambda_n}\}$ es una base de Riesz de $L^2([0, 1))$.

Radio y Densidad de un Marco

Sea $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Definición

El *radio del marco* se define como el número

$$R(\Lambda) = \sup\{R > 0 : \{e_{\lambda_n}\} \text{ es un marco de } L^2(-R, R)\}.$$

$\{\lambda_n\}$ se dice *separada* si $\inf_{k \neq k'} |\lambda_k - \lambda_{k'}| > 0$.

$\{\lambda_n\}$ se dice *relativamente separada* si es unión finita de sucesiones separadas.

$\{\lambda_n\}$ tiene *densidad uniforme* $d > 0$ si $\exists L > 0$ tal que

$$|\lambda_k - k/d| \leq L \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Dos teoremas fundamentales

Teorema (Duffin-Schaeffer)

Si $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es separado con densidad uniforme d , entonces $R(\Lambda) \geq d/2$.

Teorema (Jaffard)

Sea $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$. Son equivalentes

- 1 \exists un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tal que $\{e_{\lambda_n}\}$ es un marco de $L^2(I)$
- 2 $\{\lambda_n\}$ es unión de una sucesión $\{\lambda_k\}_{k \in I_1}$ con densidad uniforme $d_1 > 0$, y una sucesión relativamente separada $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z} \setminus I_1}$

Además 2) implica que $\{e_{\lambda_n}\}$ es un marco de $L^2(I) \forall I : |I| < d_1$.

Densidad inferior y superior de Beurling

Sea $\Lambda \subset \mathbb{R}$ un conjunto discreto.

Definición

$$D^-(\Lambda) = \underline{\lim}_{h \rightarrow +\infty} \frac{\inf_{x \in \mathbb{R}} (\#(\Lambda \cap [-h/2, h/2] + x))}{h}$$
$$D^+(\Lambda) = \overline{\lim}_{h \rightarrow +\infty} \frac{\sup_{x \in \mathbb{R}} (\#(\Lambda \cap [-h/2, h/2] + x))}{h}$$

Si $D^-(\Lambda) = D^+(\Lambda)$ decimos que Λ tiene densidad uniforme de Beurling $D(\Lambda)$.

Sea $\Lambda \subset \mathbb{R}$. Se tiene que :

$D^+(\Lambda) < \infty$ si y solo si Λ es relativamente separada.

Teorema (Beurling-Seip)

Sea $a > 0$ y $\{\lambda_n\} = \Lambda \subset \mathbb{R}$. Si $\{e_{\lambda_n}\}$ es un marco de $L^2(-a/2, a/2)$ entonces

- $\{\lambda_n\}$ es relativamente separada y
- $D^-(\Lambda) \geq a$.

Si $\{\lambda_n\}$ es relativamente separada y $D^-(\Lambda) > a$ entonces $\{e_{\lambda_n}\}$ es un marco de $L^2(-a/2, a/2)$.

El teorema anterior solo es valido en dimensión 1. Para dimensiones mayores Beurling introdujo la siguiente noción:

Definition

EL gap ρ de un subconjunto $\Lambda = \{\lambda_k : k \in K\}$ de \mathbb{R}^n se define como:

$$\rho = \rho(\Lambda) = \inf \left\{ r > 0 : \bigcup_{k \in K} B_r(\lambda_k) = \mathbb{R}^n \right\}.$$

No es difícil probar que si Λ tiene gap ρ , entonces $D^-(\Lambda) \geq \frac{1}{2\rho}$.

Teorema (Beurling)

Sea $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto separado y $\Omega = B_r(0)$. Si $r\rho < 1/4$, entonces $\{e_{\lambda_k}\}$ es un marco para de $L_2(\Omega)$.

Marcos de Gabor (Weyl-Heisenberg)

Sea $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$, $\Lambda = \{(a_k, b_k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ un conjunto discreto, y $g \in L^2(\mathbb{R})$.

Definición

Definimos $G(\Lambda, g) = \{e^{2\pi i x a_k} g(x - b_k) : (a_k, b_k) \in \Lambda\}$. El sistema de funciones $G(\Lambda, g)$ se llama un *sistema de Gabor* asociado a Λ con ventana g .

El problema es para que conjuntos $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ y que funciones g , $G(\Lambda, g)$ es un marco (*Marco de Gabor*).

Consideremos primero el caso: Λ un reticulado. Sean $a, b > 0$ y $\Lambda = \{(na, mb)\}_{n, m \in \mathbb{Z}}$.

$$G(a, b, g) = \{e^{2\pi i x na} g(x - mb) : n, m \in \mathbb{Z}\} = \{g_{n, m}\}.$$

Si $G(a, b, g)$ es un marco, existe una función $\tilde{g} \in L^2$ tal que $G(a, b, \tilde{g})$ es un marco dual.

Resultados

Sea $g \in L^2$, $a, b > 0$, entonces

- ① Si $ab > 1$ entonces $\{g_{n,m}\}$ NO es un frame de L^2 (en particular, no es completo).
- ② Supongamos que $\{g_{n,m}\}$ es un frame de L^2 .
Entonces tenemos que $\{g_{n,m}\}$ es exacto (base de Riesz) si y solo si $ab = 1$.

O sea solo puede haber bases ortonormales (o de Riesz) de Gabor si $ab = 1$.

Teorema (Balian-Low)

Sea $g \in L^2$, $a, b > 0$ y $ab = 1$. Si $\{g_{n,m}\}$ es un frame exacto, entonces

$$\|tg(t)\|_2 \|w\hat{g}(w)\|_2 = +\infty.$$

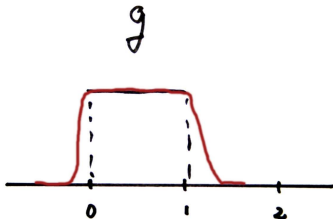
(O sea $|R| = +\infty$.)

Sin embargo, para $ab < 1$ existen marcos bien localizados.

Marcos de Gabor

Ejemplos de marcos de Gabor:

- $g = \chi_{[0,1]}$ $a = b = 1$ (base ortonormal). $\|w\hat{g}(w)\|_2 = +\infty$.
- Painless:



Si $a < 1$ y $b = 1$ entonces $G(a, b, g)$ es un marco (no exacto) bien localizado. (notar que $ab < 1$).

- El caso Gaussiano:

$\varphi(x) = e^{-x^2}$, $G(a, b, \varphi)$ es un marco de L^2 , si y solo si $ab < 1$.

Caso irregular

(Notar que $D(\Lambda) = 1/ab$ si $\Lambda = \{(na, mb)\}$)

Sea $g \in L^2$, $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ separado.

- Si $D^+(\Lambda) < 1 \implies G(\Lambda, g)$ no es un marco.
- Si $D^+(\Lambda) = D^-(\Lambda)$ y $G(\Lambda, g)$ es base de Riesz, entonces $D(\Lambda) = 1$.
- Caso Gaussiano irregular
 $\varphi(x) = e^{-x^2}$, $G(\Lambda, \varphi)$ es un frame $\iff D^-(\Lambda) > 1$

Transformada de Zak

Una herramienta básica en el estudio de los marcos de Gabor, es la *transformada de Zak*.

$$\text{Si } f \in L^2, \quad Zf(t, w) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(t+k) e^{2\pi i k w}.$$

Se satisface:

$$Zf(t+1, w) = e^{-2\pi i w} Zf(t, w) \quad Zf(t, w+1) = Zf(t, w),$$

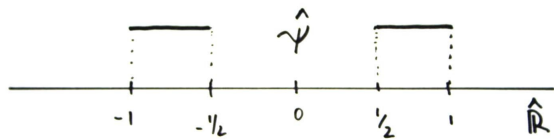
o sea está determinada por sus valores en $[0, 1]^2$.

Teorema

Sea $g \in L^2$, $a = b = 1$. Entonces

- ① $\{g_{n,m}\}$ es completo en $L^2 \iff Zg \neq 0$ a.e.
- ② $\{g_{n,m}\}$ es un marco L^2 con cotas $A, B > 0 \iff A \leq |Zg(t, w)|^2 \leq B$ a.e.
- ③ $\{g_{n,m}\}$ es base ortonormal de $L^2 \iff |Zg(t, w)| = 1$ a.e.

Esquema general de construcción de marcos



ψ es una wavelet (wavelet de Shannon)

Si $S_0 = [-1, -1/2] \cup [1/2, 1]$ entonces

$$\mathbb{R}^n = \cup_{j \in \mathbb{Z}} 2^j S_0 = \cup_{j \in \mathbb{Z}} S_j \text{ con } |S_j \cap S_{j'}| = 0.$$

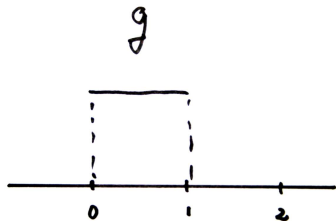
$\{e^{-2\pi i w k} \hat{\psi}(w)\}_k$ es una b.o.n. de $L^2(S_0)$, y

$\{e^{-2\pi i (2^{-j} w) k} (2^{-j/2} \hat{\psi}(2^{-j} w)) : k \in \mathbb{Z}\}$ es una b.o.n. de $L^2(S_j)$

o sea $\{e^{-2\pi i (2^{-j} w) k} (2^{-j/2} \hat{\psi}(2^{-j} w)) : k, j \in \mathbb{Z}\}$ es una b.o.n. de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

y anti-transformando $\{2^{j/2} \psi(2^j x - k) : k, j \in \mathbb{Z}\}$ b.o.n. $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Caso Gabor



$$S_0 = [0, 1], \quad S_k = [0, 1] + k.$$

$$\{e^{-2\pi i x j} g(x) : j \in \mathbb{Z}\} \text{ b.o.n. de } L^2(S_0).$$

$$\{e^{-2\pi i x j} g(x - k) : j \in \mathbb{Z}\} \text{ b.o.n. de } L^2(S_k).$$

$$\text{Luego, } \{e^{-2\pi i x j} g(x - k) : k, j \in \mathbb{Z}\} \text{ b.o.n. de } L^2(\mathbb{R}).$$

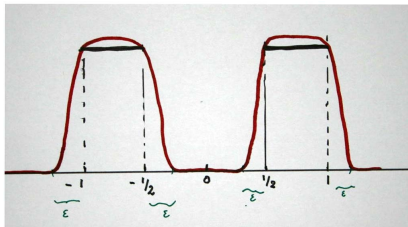
La idea es generalizar estos dos ejemplos para construir marcos suaves y con buen decaimiento de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Ingredientes

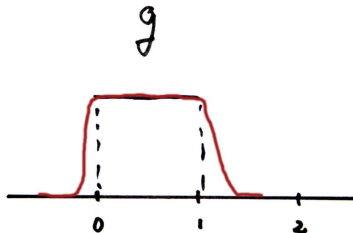
- $\{S_\alpha\}$ un cubrimiento de \mathbb{R}^n .
- $\{h_\alpha\}$ una familia de funciones asociada al cubrimiento
- $\{g_{\alpha j}\}_j$ un marco local para cada α .

Se busca que la colección $\{h_\alpha g_{\alpha j} : \alpha, j\}$ sea un marco de L^2 . En general la unión numerable de marcos no necesariamente es un marco, ya que las cotas pueden explotar.

Más ejemplos



$\{2^{j/2}\psi(2^jx - k/4\epsilon)\}$
es un marco de wavelets



$\{e^{-2\pi i x j / 2\epsilon} g(x - k)\}$
es un marco de Gabor

Cuan general es este procedimiento?

Definición

Sea $\{S_j\}$ un cubrimiento de \mathbb{R}^n . Una colección de funciones $\{h_j\}$ se dice una *partición de Riesz de la unidad (RPU) asociada a S_j* si $\text{Supp}(h_j) \subseteq S_j$ para cada j y además existen $p, P > 0$ tales que

$$p \leq \sum |h_j(x)|^2 < P \quad \text{a.e. } x.$$

Si $U \subset \mathbb{R}^n$, $K_U = \{f \in L^2 : \text{Supp} f \subset U\}$.

Teorema

Sea $\{U_j\}$ un cubrimiento de \mathbb{R}^n y $\{S_j\}$ una familia de conjuntos tales que $U_j \subset S_j \forall j$. Sea $\{h_j\}$ una RPU asociada a S_j con cotas $p, P > 0$. Si $\{g_{jk} : k \in \mathbb{Z}\}$ es un marco de K_{S_j} para cada j con cotas uniformemente acotadas por $m, M > 0$ entonces

$$\{h_j g_{jk} : j, k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{es un marco de } L^2(\mathbb{R}^n).$$

Demostración.

Dada $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ veamos primero que,

$$p\|f\|^2 \leq \sum_j \|h_j f\|^2 \leq P\|f\|^2, \quad (3)$$

Para esto observamos que,

$$p\|f\|^2 = \int p|f|^2 \leq \int \sum_j |h_j|^2 |f|^2 = \sum_j \int |h_j f|^2 = \sum_j \|f_j\|^2,$$

La otra desigualdad se prueba en forma analoga.

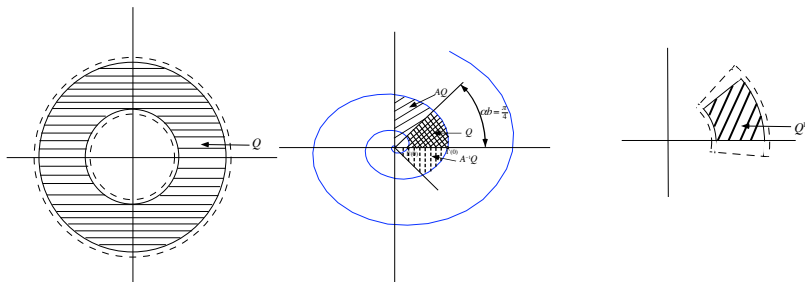
Ahora, para cada $j \in \mathbb{Z}$ y $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, usamos el hecho que $\{g_{j,k}\}_k$ es un marco para K_{S_j} , y que $\langle f, h_j g_{j,k} \rangle = \langle \bar{h}_j f, g_{j,k} \rangle$, para obtener,

$$\begin{aligned} m\|h_j f\|^2 &\leq m_j \|h_j f\|^2 \leq \sum_k |\langle f, h_j g_{j,k} \rangle|^2 \\ &\leq M_j \|h_j f\|^2 \leq M \|h_j f\|^2. \end{aligned}$$

Más ejemplos

Si se quiere usar este teorema para construir marcos de wavelets, se necesitan cubrimientos generados por dilataciones de un conjunto fijo Q . (el soporte de la transformada de Fourier de la wavelet). O sea, se necesita $Q \subset \mathbb{R}^n$ y $A \in GL_n(\mathbb{R})$ tal que

$$\mathbb{R}^n = \bigcup A^j(Q).$$



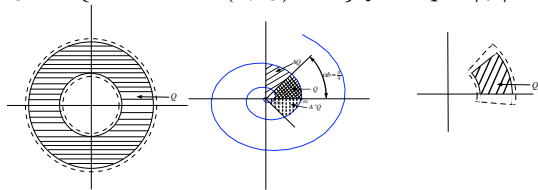
Más ejemplos

También se necesita construir marcos de exponenciales soportados sobre Q . Las dilataciones de estas exponenciales con la matriz A producirán entonces marcos de exponenciales de las dilataciones de Q .

La existencia de estos marcos está garantizada por el teorema de Beurling del Gap. (solo se necesita una grilla de \mathbb{R}^n suficientemente densa).

Por último se deberá elegir la función wavelet.

Para ello basta elegir una función suave $\hat{\psi}$ soportada en un conjunto $Q_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : d_n(x, Q) < \epsilon\}$ y tal que $|\hat{\psi}| > c$ en Q .



Resumiendo, necesitamos

- 1) $Q \subset \mathbb{R}^n$ (acotado)
- 2) $A \in GL_n(\mathbb{R})$ tal que $\mathbb{R}^n = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} A^j(Q)$.
- 3) $\hat{\psi}$ suave y tal que $\text{supp}(\hat{\psi}) \subset Q_\epsilon$ y $|\hat{\psi}| > c > 0$ en Q .

La condición 2) parece la más difícil de obtener. Sin embargo se tiene el siguiente lema:

Lema: Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado con $0 \in \text{int}(V)$ y A una matriz expansiva. Sea $Q = A(V) \setminus V$. Entonces la familia $\{A^j(Q) : j \in \mathbb{Z}\}$ es un cubrimiento de \mathbb{R}^n .

Marcos de Traslaciones

Sea φ una función arbitraria en $L^2(\mathbb{R})$ y denotemos nuevamente por t_y el operador traslación por $y \in \mathbb{R}$, o sea $t_y f(x) = f(x - y)$, $x \in \mathbb{R}$.

Definimos,

$$S(\varphi) = \overline{\text{gen}\{t_k \varphi : k \in \mathbb{Z}\}}.$$

El subespacio $S(\varphi)$ es invariante por traslaciones enteras. O sea $t_k f \in S(\varphi)$, $\forall f \in S(\varphi)$ y $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Sea $g_\varphi(\omega) = \sum_k |\hat{\varphi}(\omega + k)|^2$ y notemos con $E_\varphi = \{\omega \in \mathbb{R} : g_\varphi(\omega) > 0\}$.

Como $\varphi \in L^2$ entonces $g_\varphi \in L^1([0, 1))$ y $\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|g_\varphi\|_{L^1(T)}$.

Valen entonces las siguientes propiedades:

i) $\{t_k \varphi : k \in \mathbb{Z}\}$ es un marco de $S(\varphi)$ si y solo

$$0 < A \leq g_\varphi(\omega) \leq B < \infty \quad \text{a. e. } \omega \in E_\varphi,$$

para algun par de constantes A y B .

Note que la propiedad anterior sobre g_φ da una condición necesaria y suficiente para que las trasladadas enteras de una función φ de L^2 sea una sucesión marco.

La medida del conjunto $[0, 1) \setminus E_\varphi$ representa de alguna forma el orden de redundancia o exceso del marco.

ii) El operador de marco T asociado a las traslaciones de φ conmuta con las traslaciones enteras. Luego tenemos que el marco dual canónico $\{T^{-1}(t_k\varphi)\}$ es $\{t_k(T^{-1}\varphi)\}$. O sea el dual canónico también es un marco de traslaciones, con generador $T^{-1}\varphi$

iii) La función $\tilde{\varphi}$ definida por

$$\hat{\tilde{\varphi}}(\omega) = \begin{cases} \frac{\hat{\varphi}(\omega)}{g_\varphi(\omega)} & \text{si } \omega \in E_\varphi \\ 0 & \text{si } \omega \in \mathbb{R} \setminus E_\varphi, \end{cases} \quad (4)$$

satisface que $T\tilde{\varphi} = \varphi$ donde T es el operador de marco. Luego $\tilde{\varphi}$ genera el marco dual canónico del marco generado por φ .

Sea φ una función arbitraria en L^2 . Definimos

$$\hat{\psi}(\omega) = \begin{cases} \frac{\hat{\varphi}(\omega)}{(g_\varphi(\omega))^{1/2}} & \text{si } \omega \in E_\varphi \\ 0 & \text{si } \omega \in \mathbb{R} \setminus E_\varphi, \end{cases} \quad (5)$$

Luego tenemos que ψ genera un marco ajustado de $S(\varphi)$. En particular si φ era una base de Riesz de $S(\varphi)$, entonces las traslaciones enteras de ψ son una base ortonormal de $S(\varphi)$. Esta última propiedad puede verse como un proceso de ortonormalización de una base infinita.

Notemos que de aquí se deduce que todo espacio $S(\varphi)$ tiene un marco ajustado de traslaciones, pero no necesariamente una base de Riesz de traslaciones, ya que esto ocurre si y solo si E_φ tiene medida 1 en el $[0, 1]$. Sin embargo, puede probarse que dada $\varphi \in L^2$, existe $\psi \in L^2$ tal que $S(\varphi) \subset S(\psi)$ y ψ es un generador de Riesz de $S(\psi)$.

La teoría del muestreo o sampling ha sido originalmente desarrollada en el espacio P_σ de las funciones de ancho de banda 2σ , o sea el espacio de las funciones $f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\text{sop}(\hat{f}) \subset [-\sigma, \sigma]$, donde $\sigma > 0$.

El Teorema Clásico del Muestreo, establece que cada función f in esta clase puede ser recuperada a partir de sus valores de muestreo $f(\frac{k}{\sigma})_{k \in \mathbb{Z}}$. Además vale la siguiente fórmula de reconstrucción:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{\sigma}\right) \frac{2\sigma \sin(\pi(2\sigma x - k))}{\pi(2\sigma x - k)},$$

donde la serie del lado derecho converge uniformemente y en la norma de $L^2(\mathbb{R})$.

Este teorema ha sido generalizado de muchas formas. Por ejemplo para contestar la pregunta: i) si un resultado similar puede ser obtenido para el caso de muestreo irregular (i. e. cuando el conjunto de muestreo, no es un reticulado (grilla uniforme)) o también

ii) si hay reconstrucción cuando solo se tienen valores de muestreo obtenidos por promedios (i.e. la función debe ser recuperada a partir de los valores $\langle f, \phi_k \rangle$, donde cada ϕ_k es una función del espacio L^2 que está bien localizada alrededor de k).

No desarrollaremos aquí estas generalizaciones. Solo mostraremos la relación entre el problema del muestreo y la noción de marco.

Para ello necesitamos la siguiente definición:

Espacios de Hilbert con Nucleo Reproductivo

Un espacio de Hilbert H de funciones definidas en un conjunto S , se dice un Espacio de Hilbert con Nucleo Reproductivo (HNR) si las evaluaciones son continuas, o sea:

$$K_s : H \rightarrow \mathbb{C} \text{ definidas por } f \rightarrow f(s), f \in H$$

son funcionales continuas en H . Luego para cada $s \in S$ existe $K_s \in H$ tal que $\langle f, K_s \rangle = f(s)$.

Si se impone cierto decaimiento al generador de un espacio $S(\varphi)$, el espacio resulta ser un espacio HNR:

Sea $W_{1,\infty}$ el conjunto de las funciones $f \in L^2$ tales que

$$\|f\|_W = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sup_x |f(x) \chi_{[k,k+1]}| < \infty.$$

$W_{1,\infty}$ es un espacio de Banach. Sea ahora $W_{1,\infty}^0$ el subconjunto de las funciones continuas en $W_{1,\infty}$.

Tenemos entonces el siguiente teorema:

Si $\varphi \in W_{1,\infty}^0$ entonces $S(\varphi)$ es un HNR.

El nucleo en este caso viene dado por:

$$K_x(y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{\varphi(x-k)} \tilde{\varphi}(y-k).$$

donde $\tilde{\varphi}$ es la generadora del frame dual canónico.

Volviendo ahora al problema del sampling, este se puede generalizar de la siguiente forma:

Sea $S(\varphi)$ tal que φ es un generador marco del espacio $S(\varphi)$. Un conjunto $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$ se dice un conjunto de muestreo (sampling) si existen $A, B > 0$, tales que

$$A \|f\|^2 \leq \sum_k |f(x_k)|^2 \leq B \|f\|^2.$$







Teorema:

Sea $\varphi \in W_{1,\infty}^0$ un generador marco para $S(\varphi)$ y definamos $U_{j,k} = \varphi(x_j - k)$.
Son equivalentes:

- 1 $X = \{x_j : j \in J\}$ es un conjunto de muestreo para $S(\varphi)$.
- 2 El conjunto de núcleos reproductivos $\{K_{x_j} : j \in J\}$ es un marco para $S(\varphi)$.
- 3 Existen constantes $a, b > 0$ tales que

$$a\|c\|_{l_2} \leq \|Uc\|_{l_2} \leq b\|c\|_{l_2} \quad \forall c \in l_2(J).$$

Referencias

-  A. Aldroubi and K-H. Gröchenig, *Non-uniform sampling in shift-invariant space*, Siam Review **43** (2001), no. 4, 585–620.
-  I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, SIAM, Philadelphia, 1992.
-  G. Weiss E. Hernandez, *A first course on wavelets*, CRC Press LLC, Boca Raton, Florida, 33431, USA, 1996.
-  K. Gröchenig, *Foundations of time-frequency analysis*, Birkhäuser, New York, NY, 10010, USA, 2000.
-  S. Mallat, *A wavelet tour of signal processing*, Academic Press, San Diego, CA 92101-4495, USA, 1998.
-  Robert M. Young, *An introduction to nonharmonic Fourier series*, first ed., Academic Press Inc., San Diego, CA, 2001. MR 2002b:42001