ANALISIS REAL.

Segundo Cuatrimestre de 2003

PRACTICA 2 : FUNCIONES MEDIBLES.

1. Sea B la σ–álgebra de Borel de R y $f:\mathrm{R^p} \to \overline{\mathrm{R}}$. Probar:
   (a) Si f es medible entonces $f^{-1}(B)$ es medible para todo $B \in$ B .
   (b) Si $\overline{\mathrm{B}} = \{E = B \cup A,\ B \in \mathrm{B} \text{ y } A \subseteq \{-\infty, \infty\}\}$ entonces, f es medible si y s'olo si $f^{-1}(E)$ es medible para todo $E \in \overline{\mathrm{B}}$.
2. Sean $f, g : \mathrm{R^p} \to \overline{\mathrm{R}}$ medibles. Mostrar que los conjuntos $\{f > g\}$ y $\{f = g\}$ son medibles.
3. (a) Sea $f:\mathrm{R} \to \mathrm{R}$ tal que para todo $\alpha \in$ R , el conjunto $\{x \in \mathrm{R} : f(x) = \alpha\}$ es medible. ¿Es f medible?
   (b) Sea $f:\mathrm{R} \to \mathrm{R}$ tal que $|f|$ es medible. ¿Es f medible?
4. $f:\mathrm{R} \to \mathrm{R}$. Entonces:
   (a) Si f es monótona, entonces f es medible Borel.
   (b) Si f es derivable sobre R , entonces f' es medible Borel.
5. Si $f:\mathrm{R^p} \to \overline{\mathrm{R}}$ es medible, entonces existe $g:\mathrm{R^p} \to \overline{\mathrm{R}}$ medible Borel tal que $f = g$ a.e.
6. Sea $f:\mathrm{R^p} \to \overline{\mathrm{R}}$ continua en casi todo punto. Probar que f es medible.
7. (a) Hallar $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ continua a.e., tal que no existe $g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ continua que verifica: $f = g$ a.e.
   (b) Hallar $f, g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ tales que g es continua, $g = f$ a.e. y f es discontinua en todo punto.
8. Sea I un intervalo de $\mathrm{R^p}$.

(a) Sea $E \subseteq I$ medible. Probar que para cada $\epsilon > 0$ existe $g\colon I \to \mathrm{R}$ continua tal que

$$|\{x \in I : g(x) \neq \chi_E(x)\}| < \epsilon.$$

(b) Sea φ una funci'on simple definida sobre I. Probar que para cada $\epsilon > 0$ existe $g\colon I \to \mathrm{R}$ continua tal que

$$|\{x \in I : g(x) \neq \varphi(x)\}| < \epsilon.$$

(c) Sea $f\colon I \to \overline{\mathrm{R}}$ medible y finita en c.t.p. Probar que dados $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ existe φ simple tal que

$$|\{x \in I : |\varphi(x) - f(x)| \geq \epsilon\}| < \delta.$$

(d) Sea f como en (c). Probar que dados $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ existe g continua tal que

$$|\{x \in I : |g(x) - f(x)| \geq \epsilon\}| < \delta.$$

9. Sea E medible y $(f_k)_{k\geq 1}\colon E \to \mathrm{R}$ una sucesi'on de funciones medibles tal que para todo $x \in E$, existe $M_x \in \mathrm{R}_{>0}$:

$$|f_k(x)| \leq M_x \qquad , \qquad \forall k \in \mathrm{N} \ .$$

Probar que si para todo $\alpha > 0$, existe $k_0 = k_0(\alpha) \in \mathrm{N}$:

$$k \geq k_0 \quad \Rightarrow \quad |\{x \in E : |f_k(x)| < \alpha\}| \leq \alpha/k,$$

entonces $|E| = 0$.

10. Sea E de medida finita y $(f_k)_{k\geq 1}\colon E \to \mathrm{R}$ una sucesión de funciones medibles tal que para todo $x \in E$, existe $M_x \in \mathrm{R}_{>0}$:

$$|f_k(x)| \leq M_x \qquad , \qquad \forall k \in \mathrm{N} \ .$$

Probar que dado $\epsilon > 0$, existe $F \subseteq E$ cerrado y $M \in \mathrm{R}_{>0}$:

$$|E \backslash F| < \epsilon \quad \text{ y } \quad |f_k(x)| \leq M, \quad \forall k \in \mathrm{N} \ , \quad \forall x \in F.$$

11. Para cada $n \in \mathrm{N}$, sea $f_n : [0,\infty) \to \mathrm{R}$; $f_n(x) = n\ \chi_{[1/n,2/n]}(x)$. Probar

    (a) $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente,

    (b) para cada $\delta > 0, (f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente en $[\delta,\infty)$,

    (c) no existe $E \subset [0,\infty)$ tal que $|E| = 0$ y $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente en E^c.

12. (a) Sea E de medida finita y sean $(f_n)_{n\geq 1} : E \to \overline{\mathrm{R}}$ funciones medibles, finitas en casi todo punto de E y tal que $f_n \to_{n\to\infty} f$ a.e. en E. Probar que existe una sucesi'on $(E_i)_{i\geq 1}$ de conjuntos medibles de E tal que:

        i. $|E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i| = 0$,

        ii. para cada $i \geq 1, f_n \rightrightarrows_{n\to\infty} f$ en E_i.

    (b) El mismo resultado vale si $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ donde A_k es de medida finita para cada $k \in \mathrm{N}$.

13. Sean $(f_n)_{n\geq 1}$ y f funciones medibles definidas sobreun conjunto A y finitas en c.t.p.. Sea $(A_n)_{n\geq 1}$ unasucesión de subconjuntos de A medibles, tales que $|A \setminus A_n| \to_{n\to\infty} 0$. Probar que si $\chi_{A_n} f_n \overset{m}{\to} f$ entonces $f_n \overset{m}{\to} f$.

14. Supongamos que $f_k \overset{m}{\to} f$ y $g_k \overset{m}{\to} g$ sobre E. Probar:

    (a) $f_k + g_k \overset{m}{\to} f + g$ sobre E.

    (b) Si $|E| < +\infty$, entonces $f_k g_k \overset{m}{\to} fg$ sobre E. Mostrar que la hip'otesis $|E| < +\infty$, es necesaria.

    (c) Sea $(f_k/g_k)_{k\geq 1}$ una sucesi'on de funciones definidas en casi todo punto de E. Si $|E| < +\infty$, $g_k \to g$ sobre E y $g \neq 0$ a.e., entonces $f_k/g_k \overset{m}{\to} f/g$.

15. Sea $f_1 : [0,1] \to [0,1]$ la funci'on de Cantor–Lebesgue y $f : [0,1] \to [0,2]$ definida por: $f(x) = f_1(x) + x$.

    (a) f es continua y biyectiva. Adem'as f^{-1} es continua.

    (b) Si C es el Ternario de Cantor, $|f(C)| = 1$.

    (c) Sea $g = f^{-1}$. Mostrar que existe A medible tal que $g^{-1}(A)$ es no medible.

(d) Mostrar que existe un conjunto medible que no es boreliano.

(e) Hallar $h_1 : [a, b] \to R$ medible Borel y $h_2 : R \to R$ medible tal que $h_2 \circ h_1$ no es medible.

16. Si $f : R^n \to R$ es s.c.s. (s.c.i., continua) entonces f es medible borel.