ANALISIS REAL.

Segundo Cuatrimestre de 2002.

PRACTICA 4 : TEOREMA DE FUBINI.

1. *a*) Sea $E \subseteq \mathrm{R}^2$ medible tal que para casi todo $x \in \mathrm{R}$, $E_x = \{y \in \mathrm{R} : (x, y) \in E\}$ tiene medida nula. Probar que E tiene medida nula y que para casi todo $y \in \mathrm{R}$, $E_y = \{x \in \mathrm{R} : (x, y) \in E\}$ tiene medida nula.

   b) Sea $f(x, y)$ una funci'on medible y no negativa definida sobre R^2. Supongamos que para casi todo $x \in \mathrm{R}$, $f(x, y)$ es finita para casi todo y. Probar que para casi todo $y \in \mathrm{R}$, $f(x, y)$ es finita para casi todo x.

2. Sean f y g funciones medibles definidas sobre $\mathrm{R^n}$ y $\mathrm{R^m}$ respectivamente. Probar que $h(x, y) = f(x)g(y)$ definida sobre $\mathrm{R^{n+m}}$ es medible. Deducir que si $E_1 \subseteq \mathrm{R^n}$ y $E_2 \subseteq \mathrm{R^m}$ son conjuntos medibles, entonces su producto cartesiano $E_1 \times E_2 = \{(x, y) : x \in E_1 \wedge y \in E_2\}$ es medible en $\mathrm{R^{n+m}}$ y $|E_1 \times E_2| = |E_1||E_2|$.

3. Sea $f : (0, 1) \to \mathrm{R}$ medible. Si $h : (0, 1) \times (0, 1) \to \mathrm{R}$, definida por $h(x, y) = f(x) - f(y)$ es integrable sobre $(0, 1) \times (0, 1)$, entonces f es integrable sobre $(0, 1)$.

4. Sean $I = [0, 1]$ y $E \subseteq I \times I$ tales que:
$$|E_x|_e = |I \setminus E_y|_e = 0, \qquad \forall (x, y) \in I \times I.$$
   Probar que E no es medible.

5. Sea f una funci'on medible y no negativa definida sobre $E \subseteq \mathrm{R^n}$. Para cada $\alpha > 0$, se define
$$\omega(\alpha) = |\{x \in E : f(x) > \alpha\}|.$$
   La funci'on ω se llama <u>distribuci'on de f sobre E</u>. Probar:

   a) $\omega : (0, \infty) \to \overline{\mathrm{R}}$ es una funci'on decreciente.

   b) $\omega(\alpha+) = \omega(\alpha)$, es decir, ω es continua a derecha.

   c) $\omega(\alpha-) \geq |\{x \in E : f(x) \geq \alpha\}|$.

   d) ω continua en $\alpha \Rightarrow |\{x \in E : f(x) \geq \alpha\}| = |\{x \in E : f(x) > \alpha\}|$.

   e) Para cada $\alpha \in (0, \infty)$, $\{x : (x, \alpha) \in R(f, E)\} = \{x \in E : f(x) \geq \alpha\}$.

   f) $\int_E f = \int_0^\infty \omega(\alpha) d\alpha$. (Sug.: Notar que $\int_E f = |R(f, E)| = \int\int_{R(f,E)} dx d\alpha$, y usar el Teorema de Tonelli.)

g) Para cada $p : 0 < p < \infty$,

$$\int_E f^p dx = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \omega(\alpha) d\alpha.$$

6. Usar el Teorema de Fubini para probar la igualdad:

$$\int_{\mathrm{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

7. Dada $f : [0, \infty) \to \mathrm{R}$ medible tal que para alg'un $\alpha \in (0, 1)$, vale la desigualdad $|f(t)| \leq t^\alpha/(1 + t)$ para todo $t \geq 0$, consideramos la funci'on $G : \mathrm{R}_{\geq 0} \times \mathrm{R}_{\geq 0} \to \mathrm{R}$, definida por $G(x, t) = e^{-xt} f(t)$. Demostrar:

   a) G es medible.

   b) $G \in L^1(\mathrm{R}_{\geq 0} \times \mathrm{R}_{\geq 0})$.

8. Definimos $k : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$, $k(x, y) = x.y$. Probar que si $E \subseteq \mathrm{R}$ es medible entonces $k^{-1}(E)$ es medible. Deducir que si $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ es medible, entonces $h(x, y) = f(x.y)$ es medible.

9. Sean $A, B \subseteq \mathrm{R}$ conjuntos medibles. Probar que la funci'on $h(x) = |(A - x) \cap B|$ es medible y $\int_{\mathrm{R}} h(x)dx = |A||B|$.

10. Probar el Teorema de Fubini para funciones a valores complejos.

11. Sea $f \in L^1(\mathrm{R}^{\mathrm{n}})$.

    a) Probar que para cada $\xi \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$, la funci'on $e^{-2\pi i <\xi, x>} f(x)$, donde $< \xi, x >= \sum_{i=1}^n \xi_i x_i$, es medible e integrable.
    Se define la <u>Transformada de Fourier de f</u> como:

    $$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathrm{R}^{\mathrm{n}}} e^{-2\pi i <\xi, x>} f(x) dx, \qquad (\xi \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}).$$

    b) Probar:

       1) $\hat{f}$ es acotada y uniformemente continua.
       2) $\hat{f}(\xi) \longrightarrow_{|\xi| \to \infty} 0$, (Lema de Riemman–Lebesgue).
       3) Si $f(x) = f_1(x_1) \ldots f_n(x_n)$, donde cada $f_k \in L^1(\mathrm{R})$, $1 \leq k \leq n$, entonces $\hat{f}(\xi) = \hat{f}_1(\xi_1) \ldots \hat{f}_n(\xi_n)$.
       4) Si $g \in L^1(\mathrm{R}^{\mathrm{n}})$, entonces $(f * g)^\wedge = \hat{f}\hat{g}$.