

ANÁLISIS REAL.

*Segundo Cuatrimestre de 2002.*

PRACTICA 4 : TEOREMA DE FUBINI.

1. a) Sea  $E \subseteq \mathbb{R}^2$  medible tal que para casi todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $E_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$  tiene medida nula. Probar que  $E$  tiene medida nula y que para casi todo  $y \in \mathbb{R}$ ,  $E_y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$  tiene medida nula.  
b) Sea  $f(x, y)$  una función medible y no negativa definida sobre  $\mathbb{R}^2$ . Supongamos que para casi todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x, y)$  es finita para casi todo  $y$ . Probar que para casi todo  $y \in \mathbb{R}$ ,  $f(x, y)$  es finita para casi todo  $x$ .
2. Sean  $f$  y  $g$  funciones medibles definidas sobre  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$  respectivamente. Probar que  $h(x, y) = f(x)g(y)$  definida sobre  $\mathbb{R}^{n+m}$  es medible. Deducir que si  $E_1 \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $E_2 \subseteq \mathbb{R}^m$  son conjuntos medibles, entonces su producto cartesiano  $E_1 \times E_2 = \{(x, y) : x \in E_1 \wedge y \in E_2\}$  es medible en  $\mathbb{R}^{n+m}$  y  $|E_1 \times E_2| = |E_1||E_2|$ .
3. Sea  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  medible. Si  $h : (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $h(x, y) = f(x) - f(y)$  es integrable sobre  $(0, 1) \times (0, 1)$ , entonces  $f$  es integrable sobre  $(0, 1)$ .
4. Sean  $I = [0, 1]$  y  $E \subseteq I \times I$  tales que:

$$|E_x|_e = |I \setminus E_y|_e = 0, \quad \forall (x, y) \in I \times I.$$

Probar que  $E$  no es medible.

5. Sea  $f$  una función medible y no negativa definida sobre  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ . Para cada  $\alpha > 0$ , se define

$$\omega(\alpha) = |\{x \in E : f(x) > \alpha\}|.$$

La función  $\omega$  se llama distribución de  $f$  sobre  $E$ . Probar:

- a)  $\omega : (0, \infty) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  es una función decreciente.
- b)  $\omega(\alpha+) = \omega(\alpha)$ , es decir,  $\omega$  es continua a derecha.
- c)  $\omega(\alpha-) \geq |\{x \in E : f(x) \geq \alpha\}|$ .
- d)  $\omega$  continua en  $\alpha \Rightarrow |\{x \in E : f(x) \geq \alpha\}| = |\{x \in E : f(x) > \alpha\}|$ .
- e) Para cada  $\alpha \in (0, \infty)$ ,  $\{x : (x, \alpha) \in R(f, E)\} = \{x \in E : f(x) \geq \alpha\}$ .
- f)  $\int_E f = \int_0^\infty \omega(\alpha) d\alpha$ . (Sug.: Notar que  $\int_E f = |R(f, E)| = \iint_{R(f, E)} dx d\alpha$ , y usar el Teorema de Tonelli.)

g) Para cada  $p : 0 < p < \infty$ ,

$$\int_E f^p dx = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \omega(\alpha) d\alpha.$$

6. Usar el Teorema de Fubini para probar la igualdad:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

7. Dada  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  medible tal que para alg'un  $\alpha \in (0, 1)$ , vale la desigualdad  $|f(t)| \leq t^\alpha / (1 + t)$  para todo  $t \geq 0$ , consideramos la funci'on  $G : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $G(x, t) = e^{-xt} f(t)$ . Demostrar:

a)  $G$  es medible.

b)  $G \in L^1(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0})$ .

8. Definimos  $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k(x, y) = x \cdot y$ . Probar que si  $E \subseteq \mathbb{R}$  es medible entonces  $k^{-1}(E)$  es medible. Deducir que si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es medible, entonces  $h(x, y) = f(x \cdot y)$  es medible.

9. Sean  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  conjuntos medibles. Probar que la funci'on  $h(x) = |(A - x) \cap B|$  es medible y  $\int_{\mathbb{R}} h(x) dx = |A| |B|$ .

10. Probar el Teorema de Fubini para funciones a valores complejos.

11. Sea  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .

a) Probar que para cada  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , la funci'on  $e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} f(x)$ , donde  $\langle \xi, x \rangle = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i$ , es medible e integrable.

Se define la Transformada de Fourier de  $f$  como:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} f(x) dx, \quad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

b) Probar:

1)  $\hat{f}$  es acotada y uniformemente continua.

2)  $\hat{f}(\xi) \rightarrow_{|\xi| \rightarrow \infty} 0$ , (Lema de Riemman-Lebesgue).

3) Si  $f(x) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n)$ , donde cada  $f_k \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $1 \leq k \leq n$ , entonces  $\hat{f}(\xi) = \hat{f}_1(\xi_1) \dots \hat{f}_n(\xi_n)$ .

4) Si  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $(f * g)^\wedge = \hat{f} \hat{g}$ .