ANALISIS REAL.

Segundo Cuatrimestre de 2002

PRACTICA 3 : INTEGRAL DE LEBESGUE.

1. Sea f definida sobre R^p , medible y no negativa. Probar que si E es medible entonces:

$$\int_E f = \text{supremo}\left\{\int_E \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq f, \quad \varphi \text{ simple}\right\}.$$

2. Sea f integrable sobre R^p y $Q_n = [-n, n]^p, (n \in \mathrm{N}\ )$. Probar que:

$$\int_{Q_n^c} |f| dx \longrightarrow_{n\to\infty} 0.$$

3. *a)* Sea $f : [0, \infty) \to \mathrm{R}$ integrable. Probar que existe $(x_n)_{n\geq 1}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0.$$

   b) Mostrar que existe g integrable sobre $[0, \infty)$, continua y tal que para una sucesi'on $(x_n)_{n\geq 1}$, se verifica que:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \infty.$$

4. Sean $f : \mathrm{R}^\mathrm{p} \to \overline{\mathrm{R}}$ medible, $v \in \mathrm{R}^\mathrm{p}$ y $E \subseteq \mathrm{R}^\mathrm{p}$ medible.

   a) Si $f \geq 0$ entonces:

$$\int_{\mathrm{R}^\mathrm{p}} f(x+v)dx = \int_{\mathrm{R}^\mathrm{p}} f(x)dx \quad \text{y} \quad \int_E f(x+v)dx = \int_{E+v} f(x)dx.$$

   (Sug.: $\int_E f dx = \int_{\mathrm{R}^\mathrm{p}} f\chi_E dx$.)

   b) Si f es integrable sobre R^p , valen para f las mismas afirmaciones.

5. Sea $f : \mathrm{R}^\mathrm{p} \to \overline{\mathrm{R}}$ integrable. Probar que para todo $a > 0$ vale la igualdad:

$$\int_{R^p} f\left(\frac{x}{a}\right) dx \quad = \quad a^p \int_{R^p} f(x)dx.$$

6. Sea $f : E \to \mathrm{R}$ integrable. Probar que si $|\int_E f dx| = \int_E |f| dx$, entonces $f \geq 0$ a.e. en E 'o $f \leq 0$ a.e. en E.

7. Sea $f : E \to \mathrm{R}$ medible. Si $\int_A f dx = 0$ para todo conjunto medible $A \subseteq E$, probar que $f = 0$ a.e. en E.

8. Sea $(f_k)_{k\geq 1}$ una sucesi'on de funciones medibles no negativas definidas sobre E. Si $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ para cada $x \in E$ y $f_k \leq f$ a.e., probar que

$$\int_E f = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k.$$

9. Mostrar que en el Lema de Fatou la desigualdad puede ser estricta.

10. Mostrar que en el Lema de Fatou, la hip'otesis que las funciones de la sucesi'on son no negativas, es necesaria.

11. Sean $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesi'on de funciones integrables sobre $E \subseteq \mathrm{R}^p$ y f integrable sobre E. Si $\int_E |f_n - f| dx \longrightarrow_{n\to\infty} 0$, entonces $f_n \overset{m}{\to} f$ sobre E.

12. Sea $p > 0$ y $\int_E |f_n - f|^p dx \longrightarrow_{n\to\infty} 0$. Probar que si $\int_E |f_n|^p dx \leq M$ para todo n, entonces $\int_E |f|^p dx \leq M$.

13. Si $f \in L^1(0,1)$, mostrar que $x^n f(x) \in L^1(0,1)$, para cada $n \in \mathrm{N}$ y

$$\int_0^1 x^n f(x) dx \longrightarrow_{n\to\infty} 0.$$

14. *a*) Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesi'on decreciente de funciones medibles y no negativas sobre E con $f_1 \in L^1(E)$. Mostrar que:

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n < \infty.$$

b) Sea $x \in \mathrm{R}_{>1}$ mostrar que:

$$\lim_{n\to\infty} n(x^{1/n} - 1) = \ln x,$$

considerando la funci'on $f_n(t) = t^{(1/n)-1}$ para $1 < t < x$.

15. Sea $g(x) = x^2 \sin(1/x^2)$, definida en $(0,1)$ y f su derivada. Probar que f es continua en $(0,1)$, existe $\lim_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^1 f(x)dx$, pero $f \notin L^1(0,1)$.

(Sug.: $|f(x)| \geq (2/x)|\cos(1/x^2)| - 2x \geq 1/2x$ para x tal que $[(2n+1/3)\pi]^{-1/2} \leq x \leq [(2n-1/3)\pi]^{-1/2}, n \in \mathrm{N}$).

16. Si $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesi'on de funciones integrables sobre $E \subseteq \mathrm{R}^p$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| dx < \infty,$$

entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge absolutamente en casi todo punto de E y

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n dx.$$

17. Sean $f_n : (0,1) \to \mathrm{R}$; $f_n(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n$. Probar que:

$$\int_{(0,1)} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(0,1)} f_n.$$

Verificar que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{(0,1)} |f_n| = \infty.$$

18. Sean $E \subseteq \mathrm{R}^{\mathrm{p}}$ medible y $f : \mathrm{R}^{\mathrm{p}} \to \mathrm{R}$ medible. Para cada $n \in \mathrm{N}$, consideramos $E_n = \{x \in E : |f(x)| \geq n\}$. Entonces:

   a) f integrable sobre $E \Rightarrow \sum_{n\geq 1} |E_n| < \infty$.

   b) Si E es de medida finita,

$$\sum_{n\geq 1} |E_n| < \infty \Rightarrow f \text{ integrable sobre } E.$$

19. Sean $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesi'on de funciones integrables sobre E y f medible tales que $f_n \overset{m}{\to} f$ sobre E. Si existe g integrable sobre E tal que $|f_n| \leq g$ sobre E, entonces f es integrable y $\int_E |f_n - f| dx \longrightarrow_{n\to\infty} 0$.

20. Sea $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathrm{R}$ tal que:

   a) para todo $x \in [0,1]$, la funci'on $y \mapsto f(x,y)$ es integrable sobre $[0,1]$ y

   b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ es una funci'on de (x,y) acotada.

   Probar:

   a) para todo $x \in [0,1]$, la funci'on $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ es medible y

   b) $\frac{d}{dx} \int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy$.

21. Sea $E \subseteq \mathrm{R}^{\mathrm{p}}$ medible. Sean $f_n, f : E \to [0,1]$ medibles y tales que $f_n \overset{m}{\to} f$. Dada $\phi : [0,1] \to \mathrm{R}$ continua, probar:

   a) $\phi(f_n) \overset{m}{\to} \phi(f)$,

   b) si $|E| < \infty$, entonces $\phi(f_n) \to \phi(f)$ en $L^1(E)$.

22. Sea $g : [0,1] \to \mathrm{R}$ medible, $g(x) \geq 0$ para casi todo $x \in [0,1]$ e integrable sobre $[0,1]$. Probar que si existe $\alpha \in \mathrm{R}$ tal que para todo $n \in N$, vale la igualdad:

$$\int_0^1 g(x)^n dx = \alpha,$$

   entonces $g = \chi_E$ a. e. para alg'un conjunto $E \subseteq [0,1]$ medible.