ANALISIS REAL.

Segundo Cuatrimestre de 2002.

PRACTICA: MEDIDA DE LEBESGUE.

1. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^p$ medible y tal que $E = A \cup B$, donde $|B| = 0$. Probar que A es medible.

2. Sea $E \subseteq A$ con $|A| = 0$. Probar que E es medible y que $|E| = 0$. Deducir que el cardinal de los medibles es 2^c. Cual es el cardinal de los no medibles ?.

3. (a) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Probar que el gráfico de f es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ de medida cero.
   (b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Probar que su gráfico tiene medida cero.
   (c) Y si f tiene finitas discontinuidades ?.

4. Si E_1 y E_2 son medibles, mostrar que
$$|E_1 \cup E_2| + |E_1 \cap E_2| = |E_1| + |E_2|.$$

5. Sean $v \in \mathbb{R}^p$ y $T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p,\ T(x) = x + v$. Probar:
   (a) $|T(E)|_e = |E|_e,\ E \subseteq \mathbb{R}^p$.
   (b) Si E es medible entonces $T(E)$ es medible y $|T(E)| = |E|$.

6. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^p$ y $r > 0$. Consideramos el conjunto
$$rA = \{r.a : a \in A\}.$$
   Probar:
   (a) $|rA|_e = r^p|A|_e$.
   (b) Si A es medible entonces rA es medible y $|rA| = r^p|A|$.

7. Sea $B(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^p : |x| < r\}$.

    (a) Suponiendo conocida $|B(0,1)|$, calcular $|B(0,r)|$.

    (b) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^p$ medible. Probar que $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, dada por: $f(r) = |A \cap B(0,r)|$ es continua.

    (c) Si A es medible, para cada $s : 0 \leq s \leq |A|$, existe $B \subseteq A$ medible tal que $|B| = s$.

    (d) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^p$ medible y tal que $0 < |A| < \infty$. Probar que dado $n \in \mathbb{N}$, existen n subconjuntos disjuntos de $A : (A_j)_{1\leq j\leq n}$ tales que $|A_j| = |A|/n$, para cada $j : 1 \leq j \leq n$.

8. Sea $T : [0,1) \to [0,1)$ definida por:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1/2 \\ 2x - 1, & 1/2 \leq x < 1 \end{cases} .$$

    Probar que: $E \subseteq [0,1)$ medible $\Rightarrow T^{-1}(E)$ medible. Además $|T^{-1}(E)| = |E|$.

9. Para cada sucesión de conjuntos medibles $(A_n)_{n\geq 1}$ definimos

$$A_* = \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{y} \quad A^* = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

    Probar:

    (a) A_* y A^* son medibles.

    (b) $|A_*| \leq \liminf_{n\to\infty} |A_n|$.

    (c) Si para algún n, $|\cup_{k=n}^{\infty} A_k| < \infty$, entonces $|A^*| \geq \limsup_{n\to\infty} |A_n|$.

    (d) Si $\sum_{n\geq 1}^{\infty} |A_n| < \infty$, entonces $|A^*| = 0$.

    (e) Que pasa si A_n es creciente ?. (Es decir si $A_n \subseteq A_{n+1}$).

10. Probar que cualquier conjunto con medida positiva tiene la potencia del continuo.

11. Construir un subconjunto de $[0,1]$ como el conjunto de Cantor excepto que en el k–'esimo paso, cada intervalo que se extrae tiene longitud $\delta 3^{-k}, 0 < \delta < 1$. Probar que el conjunto obtenido es perfecto, tiene medida $1 - \delta$ y no contiene intervalos.

12. Sea E el conjunto de puntos del $(0,1)$ tal que: $x \in E$ si y sólo si en el desarrollo decimal de x no aparece el dígito 7. Mostrar que E tiene medida de Lebesgue 0.

13. Probar la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

    (a) E es medible.

    (b) Para todo $\epsilon > 0$, existe $F \subseteq E$ cerrado tal que $|E \backslash F|_e < \epsilon$.

    (c) Existen H de clase F_σ y N de medida cero, tal que $E = H \cup N$.

14. Construya una sucesión de conjuntos $\{E_k\}$ disjuntos tal que $|\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k|_e < \sum_{k\in\mathbb{N}} |E_k|$. (Considerar translaciones racionales de conjuntos de Vitali).

15. Para cada $E \subseteq \mathrm{R}^{\mathrm{p}}$ definimos su medida interior

$$|E|_i = \sup\{|F| : E \supseteq F,\ F\text{cerrado}\}.$$

    Probar:

    (a) $|E|_i \leq |E|_e$.

    (b) Si E es medible entonces $|E|_i = |E|_e$.

    (c) Si $|E|_e < \infty$ y $|E|_i = |E|_e$, entonces E es medible.

    (d) Existe E no medible tal que $|E|_i = |E|_e$.

    (e) $E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow |E_1|_i \leq |E_2|_i$.

    (f) $(E_j)_{j\geq 1}$ disjuntos, entonces $|\bigcup_{j\geq 1} E_j|_i \geq \sum_{j\geq 1} |E_j|_i$.

16. Sea V un conjunto de Vitali. Si E es medible y $E \subseteq V$ entonces $|E| = 0$. Luego $|V|_i = 0$.

17. (a) Construir una sucesión de conjuntos $(E_j)_{j\geq 1}$ tal que $|\bigcup_{j\geq 1} E_j|_i > \sum_{j\geq 1} |E_j|_i$. ($V \subseteq [0,1]$ un Vitali y $\{r_j\}_{j\geq 1}$ numeración de los racionales del $[-1,1]$. Si $E_j = r_j + V$, entonces $[0,1] \subseteq \bigcup_{j\geq 1} E_j$ y $\sum_{j\geq 1} |E_j|_i = 0$.)

    (b) Construir $E \subseteq \mathbb{R}$ tal que $|E|_i < \infty$ y $|E|_e = \infty$. (Sean $T_n \subseteq [2(n-1), 2(n-1)+1]$ ternario de medida $1/2^n$, $V_1 \subseteq [1+1/4, 1+3/4]$ un Vitali y $V_n = 2(n-1) + V_1 \subseteq [2(n-1)+1, 2(n-1)+2]$, definir $E = \bigcup_{n\geq 1}(T_n \cup V_n)$.)

18. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^p$ medible y $A \subseteq E$. Probar que:

$$|E| = |A|_i + |E \backslash A|_e.$$

19. Sea $Z \subseteq \mathbb{R}$ tal que $|Z| = 0$. Mostrar que $E = \{x^2 : x \in Z\}$ tiene medida nula.

20. Sea $E \subset \mathbb{R}$ con la siguiente propiedad: existe $q, 0 < q < 1$ tal que para todo intervalo (a, b), el conjunto $E \cap (a, b)$ puede cubrirse con numerables intervalos cuya suma de longitudes es a lo sumo $q(b - a)$. Entonces E es un conjunto de medida nula.

21. Sean $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Denotemos por I' los intervalos con ejes paralelos al nuevo sistema de coordenadas, y por $|E|'_e$ la medida exterior de un conjunto E relativo a este sistema de coordenadas.

    Probar que $|E|'_e = |E|_e$ para todo $E \subset \mathbb{R}^n$

22. Sea $E \subset \mathbb{R}^N$ medible con $|E| > 0$. Probar que dado $\epsilon > 0$ existe un intervalo I tal que $|E \cap I| > 0$ y $|I - (E \cap I)| < \epsilon$.

23. Mostrar que existe un subconjunto H del intervalo $[0, 1]$ de clase F_σ, de medida uno, formado solo por puntos irracionales. Probar que H es union numerable de conjuntos cerrados de interior vacio.

24. Sea $E \subset \mathbb{R}$ medible que cumple la siguiente propiedad, si $x \in E$ e $y \in E$ entonces $\frac{x+y}{2} \notin E$. Probar que E tiene medida cero. Sugerencia: Probar que si I es un intervalo centrado en un punto de E entonces $|E \cap I| \leq \frac{1}{2}|I|$.