NOMBRE: **LU:**

ANALISIS REAL
2^{do}-Cuatr. 2002
PRIMER PARCIAL
22-10-2002

(1) Sea A el conjunto de puntos del $[0,1]$ que admiten una representación usando sólo los dígitos $\{0,2,3\}$ en su desarrollo en base 4, y B el conjunto de puntos del $[0,1]$ que admiten una representación en base 4 donde el dígito 1 aparece sólo una vez.

Probar que A y B son medibles, y calcular su medida.

(2) Sean $f_n, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ medibles y finitas p.p., y $f_n \xrightarrow{\text{m}} f$. Probar que existen:

Una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ y conjuntos medibles $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y Z con $|\,Z\,| = 0$ tal que

$$\mathbb{R} = \left(\bigcup_i^{\text{d}} E_i\right) \cup Z \quad \text{y} \quad f_{n_k} \xrightarrow{\circ} f,$$

sobre cada E_i.

(3) Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles en $E \subseteq \mathbb{R}^p$. Probar que

$$\{x \in E : f_n(x) \quad \text{converge}\}$$

es medible.

(4) Sea $E \subset [0,1]$ medible. Si existe $\delta \in (0,1)$ tal que

$$\forall I = (a,b) \subset [0,1], \quad |E \cap I| \geq \delta |I|,$$

entonces $|E| = 1$

(5) Sea $f : E \subset \mathbb{R}^p \to \overline{\mathbb{R}}$ medible, y

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \leq n \\ n & \text{si } f(x) > n \\ -n & \text{si } f(x) < -n \end{cases}.$$

(a) Si $f(x) \in L(E)$, entonces $\int_E f = \lim \int_E f_n$.

(b) Si $\sup \int_E |f_n| < +\infty$ entonces $f \in L(E)$.