PRÁCTICA II

ALGEBRA CONMUTATIVA - 1ER. CUATRIMESTRE 2014

En toda la práctica, A denota siempre un anillo conmutativo con unidad 1. La referencia [A-M] se refiere al libro de Introducción al Álgebra Conmutativa de Atiyah - Macdonald.

Ejercicio 1. Hacer el ejercicio 3 del Cap. II del libro [A-M].

Ejercicio 2. Si M, N, P son A-módulos, probar que $(M \oplus N) \otimes P \simeq (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$. Probar que $M \oplus N$ es playo si y solo si M y N son playos.

Ejercicio 3. Hacer los ejercicios 6 y 7 del Cap. II del libro [A-M].

Ejercicio 4. Hacer el ejercicio 11 del Cap. II del libro [A-M].

Ejercicio 5. Hacer el ejercicio 13 del Cap. II del libro [A-M] (¿Reconocen lo que hice en el Lema 2 de la clase del viernes 25/4?).

Ejercicio 6. Hacer los ejercicios 17 y 20 del Cap. II del libro [A-M].

Ejercicio 7. Sea S un subconjunto multiplicativo de un anillo A y definamos

$$\overline{S} := \{s \in A \,/\, \text{existe}\, t \in A \ \text{ tal que}\, s.t \in S\}$$

Probar que

i) $\overline{S}$ es un conjunto multiplicativo saturado que contiene a S.
ii) S es saturado si y sólo si $A \backslash S$ es una unión de ideales primos.
iii) $S^{-1}A \simeq \overline{S}^{-1}(A)$.

Probar que el anillo $A = k[x_1, 1/x_1, \ldots, x_n, 1/x_n]$ es isomorfo a los siguientes anillos:

$$A \simeq k[x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n]/\langle x_1y_1-1, \ldots, x_ny_n-1\rangle \simeq k[x_1, \ldots, x_n, y]/\langle x_1 \ldots x_ny-1\rangle.$$

¿Qué tiene que ver esto con la primera parte del ejercicio?

Ejercicio 8. Sean M, N A-módulos y $f : M \to N$ un morfismo de A-módulos. Dado un conjunto multiplicativo $S \subset A$, sea $S^{-1}f : S^{-1}M \to S^{-1}N$ el morfismo asociado (definido por $S^{-1}f(a/s) = S^{-1}f(a)/s$). Probar que $\text{Ker}(S^{-1}f) = S^{-1}(\text{Kerf})$. Luego, si f es inyectiva $S^{-1}f$ lo es. ¿Vale la recíproca?

Ejercicio 9. Si A es un anillo, $S \subset A$ un subconjunto multiplicativo e I un ideal de A, probar que $J^{ec} = \cup_{s \in S}(I : s)$. Vimos que esto implica que los ideales primos de $S^{-1}A$ están en correspondencia biyectiva con los ideales primos de A que no cortan a S.

Probar el Corolario 3.12: $\mathcal{N}(S^{-1}A) = S^{-1}\mathcal{N}(A)$, donde $\mathcal{N}$ denota el nilradical. Sea A el anillo $k[x,y]/\langle xy^2\rangle$, $\mathcal{P} = \langle\overline{y}\rangle$, que es un ideal primo, y $S_{\mathcal{P}} = A \setminus \mathcal{P}$. Calcular $\mathcal{N}(A), \mathcal{N}(S^{-1}A)$ y verificar la igualdad del Corolario 3.12 en este ejemplo.

Ejercicio 10. Hacer el ejercicio 12 del Cap. III del libro [A-M].

Ejercicio 11. Si $f, g \in A$, S_f, S_g los conjuntos multiplicativos de sus potencias y $\varphi_f : A \to A_f$, $\varphi_g : A \to A_g$ los morfismos naturales, demostrar que existe un morfismo de A-módulos $\psi : A_g \to A_f$ tal que $\varphi_f = \psi \circ \varphi_g$ si y solo si existe $a \in A$ y un natural n tal que $ag = f^n$.

Hacer el ejercicio 23 del Cap. III del libro [A-M].