PRÁCTICA I

ALGEBRA CONMUTATIVA - 1ER. CUATRIMESTRE 2006

En toda la práctica, A denota siempre un anillo conmutativo con unidad 1. La referencia [A-M] se refiere al libro de Introducción al Álgebra Conmutativa de Atiyah - Macdonald.

Ejercicio 1. Consideremos el morfismo de anillos $f : k[x, y] \to k[t]$, donde k es un cuerpo y $f(x) = t^2, f(y) = t^3$. Probar que

$$\mathrm{Ker}(f) = \{p(x, y) \,/\, p(t^2, t^3) = 0\} = \langle x^3 - y^2 \rangle.$$

Probar que el anillo $k[x, y]/\langle x^3 - y^2 \rangle \equiv k[t^2, t^3]$ es un dominio íntegro.

Ejercicio 2. Sea I un ideal de A y consideremos la aplicación canónica $f_I : A \to A/I$. Dado que f_I es un morfismo de anillos, es posible interpretar en este contexto la extensión y contracción de ideales. Calcular $(J^e)^c$ para todo ideal J en A y $(J'^c)^e$ para todo ideal J' en A/I. Probar que existe una correspondencia biyectiva entre ideales J de A que contienen a I e ideales J' del anillo A/I.

Ejercicio 3. Para cada $f \in A$ definimos $X_f \subseteq Spec(A)$ como el abierto

$$X_f := \{[\mathcal{P}]/f \notin \mathcal{P}\} = Spec(A)\backslash V(\langle f \rangle).$$

Probar que $\{X_f, f \in A\}$ es una base de abiertos de $Spec(A)$.

Ejercicio 4. Sea $\mathcal{M} = \langle x \rangle$ en $k[x]$. Calcular el espectro de los cocientes $Spec(k[x]/\mathcal{M}^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y el espectro de la localización $Spec(k[x]_{\mathcal{M}})$.

Ejercicio 5. Sea S un subconjunto multiplicativo de un anillo A y

$$\overline{S} := \{s \in A \,/\, \text{existe}\, t \in S \;\text{ tal que}\, s.t \in S\}$$

Probar que

i) $\overline{S}$ es un conjunto multiplicativo saturado que contiene a S.
ii) S es saturado si y sólo si $A\backslash S$ es una unión de ideales primos.
iii) $S^{-1}A \simeq \overline{S}^{-1}(A)$.

Probar que

$$k[x, 1/x, y, 1/y] \simeq k[x, y, t, s]/\langle xs - 1, yt - 1\rangle \simeq k[x, y, z]/\langle xyz - 1\rangle.$$

Qué tiene que ver esto con la primera parte del ejercicio?

Ejercicio 6. Sea $f = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$ y sea I el ideal generado por f y sus derivadas parciales en $\mathbb{Q}[x, y, z]$. Es xyz un divisor de cero en $\mathbb{Q}[x, y, z]/I$? Calcular el mínimo n tal que $(x + y + z)^n \in I$. Mismas preguntas pero cambiando el cuerpo $\mathbb{Q}$ por el cuerpo de 3 elementos.

Ejercicio 7. Consideremos los anillos $A := \mathbb{C}[x,y]/\langle x^2 - y^3 \rangle$, $B := \mathbb{C}[x,y]/\langle xy \rangle$ y los conjuntos multiplicativos: S el conjunto de no divisores de cero en A, S' el conjunto de no divisores de cero en B, T el complemento del ideal que generan $\overline{x}, \overline{y}$ en A, T' el complemento del ideal que generan $\overline{x}, \overline{y}$ en B. Determinar las localizaciones $S^{-1}A, {S'}^{-1}B, T^{-1}A, {T'}^{-1}B$. Es algún par de los seis anillos $A, B, S^{-1}A, {S'}^{-1}B, T^{-1}A, {T'}^{-1}B$ isomorfo?

Ejercicio 8. Supongamos que $b = a + n$, con $a, b, n \in A$ y n nilpotente. Probar que b es una unidad si y solo si a es una unidad. Hacer el ejercicio 2 del Cap. I del libro [A-M].

Ejercicio 9. Hacer los ejercicios 3 y 5 del Cap. I del libro [A-M].

Ejercicio 10. Hacer los ejercicios 7 y 11 del Cap. I del libro [A-M].

Ejercicio 11. Hacer el ejercicio 14 del Cap. I del libro [A-M].

Ejercicio 12. Sea I un ideal de A. Probar que si $\sqrt{I}$ es un ideal primo, entonces $V(I)$ es irreducible (es decir no puede escribirse como la unión de dos cerrados propios; la recíproca la vimos en clase). Hacer el ejercicio 19 del Cap. I del libro [A-M].

Ejercicio 13. Hacer el ejercicio 21 items 1) hasta v), del Cap. I del libro [A-M].

Ejercicio 14. Hacer el ejercicio 26 del Cap. I del libro [A-M].

Ejercicio 15. Hacer el ejercicio 28 del Cap. I del libro [A-M].

Ejercicio 16. Hacer el ejercicio 3 del Cap. II del libro [A-M].

Ejercicio 17. Si M, N, P son A-módulos, probar que $(M \oplus N) \otimes P \simeq (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$. Probar que $M \oplus N$ es playo si y solo si M y N son playos.

Ejercicio 18. Hacer el ejercicio 7 del Cap. II del libro [A-M].

Ejercicio 19. Hacer el ejercicio 11 del Cap. II del libro [A-M].

Ejercicio 20. Hacer el ejercicio 12 del Cap. II del libro [A-M].

Ejercicio 21. Hacer el ejercicio 17 del Cap. II del libro [A-M].

Ejercicio 22. Hacer los ejercicios 12 y 13 del Cap. III del libro [A-M].

Ejercicio 23. Hacer los ejercicios 12 y 13 del Cap. III del libro [A-M].

Ejercicio 24. Hacer el ejercicio 15 del Cap. III del libro [A-M].

Ejercicio 25. Hacer el ejercicio 16 del Cap. III del libro [A-M].

Ejercicio 26. Hacer el ejercicio 19 del Cap. III del libro [A-M].

Ejercicio 27. Hacer el ejercicio 20 del Cap. III del libro [A-M].