PRÁCTICA I

ALGEBRA CONMUTATIVA - 1ER. CUATRIMESTRE 2014

En toda la práctica, A denota siempre un anillo conmutativo con unidad 1. La referencia [A-M] se refiere al libro de Introducción al Álgebra Conmutativa de Atiyah - Macdonald.

Ejercicio 1. Consideremos el morfismo de anillos $f : k[x, y] \to k[t]$, donde k es un cuerpo y $f(x) = t^2, f(y) = t^3$. Probar que

$$\mathrm{Ker}(f) = \{p(x, y) \,/\, p(t^2, t^3) = 0\} = \langle x^3 - y^2 \rangle.$$

Probar que el anillo $k[x, y]/\langle x^3 - y^2 \rangle$ es un dominio íntegro (sugerencia: probar que es isomorfo al anillo $k[t^2, t^3]$).

Ejercicio 2. Sea I un ideal de A y consideremos la aplicación canónica $\phi_I : A \to A/I$. Dado que ϕ_I es un morfismo de anillos, es posible interpretar en este contexto la extensión y contracción de ideales.

- Calcular $(J^e)^c$ para todo ideal J en A y $(J'^c)^e$ para todo ideal J' en A/I.
- Probar que existe una correspondencia biyectiva entre ideales primos de A que contienen a I e ideales primos del anillo A/I.
- Probar que un ideal I de A verifica que $I = \sqrt{I}$ (en cuyo caso se dice que I es radical) si y sólo si I es intersección de ideales primos.

Ejercicio 3. Probar que si I, J son ideales de A, entonces

$$\sqrt{I + J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}.$$

Dar un ejemplo en $\mathbb{Z}[x]$ de dos ideales radicales tales que su suma no sea radical.

Ejercicio 4. Probar que todo anillo conmutativo con 1 no nulo tiene ideales primos minimales respecto de la inclusión. Encontrar todos los primos minimales del anillo $k[x, y]/\langle xy \rangle$, donde k es un cuerpo.

Ejercicio 5. Supongamos que $b = a + n$, con $a, b, n \in A$ y n nilpotente. Probar que b es una unidad si y solo si a es una unidad. Hacer el ejercicio 2 del Cap. I del libro [A-M]. Probar además que para todo A, ningún polinomio mónico es divisor de cero en $A[x]$.

Ejercicio 6. Hacer el ejercicio 5 del Cap. I del libro [A-M].

Ejercicio 7. Hacer los ejercicios 7 y 11 del Cap. I del libro [A-M].

Ejercicio 8. Hacer el ejercicio 12 del Cap. I del libro [A-M].

Ejercicio 9. Sea $f : A \to B$ un morfismo de anillos (conmutativos, con 1). Probar que $f^* : Spec(B) \to Spec(A)$ es continua.

Ejercicio 10. ¿Es cierto que para todo anillo A conmutativo con 1, $Spec(A)$ es no vacío?

Ejercicio 11. Sea $\mathcal{M} = \langle x \rangle$ en $k[x]$. Calcular el espectro de los cocientes $Spec(k[x]/\mathcal{M}^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 12. Hacer el ejercicio 17 del Cap. I del libro [A-M].

Ejercicio 13. Hacer el ejercicio 18 del Cap. I del libro [A-M].

Ejercicio 14. Sea I un ideal de A. Probar que $\sqrt{I}$ es un ideal primo si y sólo si $V(I)$ es irreducible (es decir no puede escribirse como la unión de dos cerrados propios). Hacer el ejercicio 19 del Cap. I del libro [A-M].

Ejercicio 15. Hacer el ejercicio 28 del Cap. I del libro [A-M].