DISCRIMINANTES, RESULTANTES Y FUNCIONES HIPERGEOMÉTRICAS

ALICIA DICKENSTEIN

Esta es una versión sin gráficos de la Conferencia "Alberto Gónzález Domínguez" que ofrecí el 21 de septiembre de 2001 en San Luis, durante la LI Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina. Agradezco nuevamente a las autoridades de la UMA por esta invitación.

Esta exposición y gran parte de mis últimos trabajos están inspirados en los trabajos de I. M. Gelfand, M. M. Kapranov y A. V. Zelevinsky, y la principal referencia es su libro "Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants" [10]. En su búsqueda de la construcción de una teoría general de funciones hipergeométricas multivariadas, encontraron hermosas conexiones con muchas cuestiones en álgebra y combinatoria, redescubriendo y revitalizando conceptos clásicos en teoría de eliminación.

1. Discriminantes

1.1. **Primeros ejemplos y motivaciones.** Comencemos con un ejemplo bien conocido. Consideremos un polinomio de grado dos:

$$f(t) \,=\, at^2 + bt + c\,, \quad a \neq 0$$

y su discriminante

$$\Delta(f) = \Delta(a,b,c) = b^2 - 4ac. \tag{1.1}$$

Entonces, $\Delta(a,b,c) = 0 \Leftrightarrow$ existe $t \in \mathbb{C}$ que es raíz doble de $f \Leftrightarrow$ existe $t \in \mathbb{C}$ tal que $f(t) = f'(t) = 0 \Leftrightarrow$ la terna (a,b,c) es tal que existe $t \in \mathbb{C}$ satisfaciendo simultáneamente $at^2 + bt + c = 2at + b = 0$.

Geométricamente, la hipersuperficie $\{(a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \,/\, \Delta(a,b,c) = 0\}$ es la proyección sobre las tres primeras coordenadas de la subvariedad de $\mathbb{C}^4$ definida por la intersección de las hipersuperficies $\{(a,b,c,t)/at^2 + bt + c = 0\}$ y $\{(a,b,c,t) \,/\, 2at + b = 0\}$, es decir, se ha eliminado la variable t.

En general, dado un polinomio univariado genérico de grado n:

$$f(t) \,=\, a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n\,, \quad a_n \neq 0,$$

es conocida clásicamente la existencia de un polinomio discriminante $\Delta(f) = \Delta_n(f) = \Delta(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}[a_0, \ldots, a_n]$ irreducible y único salvo signo que verifica $\Delta(a_0, \ldots, a_n) \neq 0 \Leftrightarrow$ f tiene todas sus raíces simples $\Leftrightarrow f(t) = f'(t) = 0$ no tiene solución. Esta noción tiene numerosas aplicaciones en teoría de números. También podemos asociar un discriminante a un polinomio univariado *ralo* (o *sparse*, en inglés). Por ejemplo, fijemos los exponentes $A = \{0, 2, 3, 6\}$ y $f_A(t) = a_0 + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_6 t^6$. Entonces si f_A tiene algún cero múltiple, se anula el discriminante

$$\Delta_A(a_0, a_2, a_3, a_6) = -108 a_2^3 a_3^4 - 34.992 a_0^3 a_3^2 a_6^2 + 8.748 a_0^2 a_3^4 a_6 \\ -729 a_0 a_3^6 + 8.640 a_0 a_2^3 a_3^2 a_6 + 1.024 a_2^6 a_6 + 13.824 a_0^2 a_2^3 a_6^2 + 46.656 a_0^4 a_6^3.$$

Notar que $108 = 1^1 2^2 3^3, 729 = 3^3 3^3, 1.024 = 2^2 4^4, 46.656 = 6^6$.

La teoría de discriminantes está íntimamente relacionada a nuestros esquemas de visión. Lo que vemos de un objeto Σ es su borde, es decir, los puntos p de Σ para los cuales el rayo de luz de nuestro ojo a p es tangente a Σ, o más precisamente, una proyección de su borde. Si suponemos que establecemos un sistema de coordenadas proyectivas donde nuestros ojos están en el infinito del eje z, y la superficie Σ está descripta por una ecuación polinomial $\{F(x, y, z) = 0\}$, buscamos la proyección $\Delta(x, y) = 0$ sobre el plano (x, y) (dada por el discriminante respecto de z) de la curva de contacto definida por el par de ecuaciones $F(x, y, z) = \frac{dF}{dz}(x, y, z) = 0$.

Por otro lado, si miramos $\{F(x, y, z) = 0\}$ como una familia de curvas planas C_z parametrizadas por z, cuando $\Delta(x_0, y_0) \neq 0$, podemos despejar $z = g(x, y)$ cerca de (x_0, y_0). Es decir, pasa una única curva C_z por cada punto. Esto provee unicidad en la ecuación diferencial implícita $F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$, ya que es localmente equivalente a la ecuación diferencial explícita de primer orden $dy/dx = g(x, y)$, y las soluciones singulares de la ecuación están contenidas en la variedad discriminantal $\Delta(x, y) = 0$.

La distancia a la variedad discriminantal está relacionada con la inestabilidad numérica [1]. Consideremos el polinomio de Wilkinson

$$p(t) = (t + 1)(t + 2) \ldots (t + 19)(t + 20),$$

que claramente tiene 20 raíces reales. Sin embargo, el polinomio $q(t) = p(t) + 10^{-9} t^{19}$, obtenido por una pequeña perturbación de uno de los coeficientes de p tiene sólo 12 raíces reales y 4 pares de raíces complejas conjugadas, un par con parte imaginaria aproximadamente $\pm 0,88i$. Podemos explicar este fenómeno en términos del discriminante. Miremos la familia uniparamétrica de polinomios $p_a(t) = p(t) + a t^{19}$. Entonces $p(t) = p_0$ y $q(t) = p_{10^{-9}}$. Para que un par de raíces complejas conjugadas "se unan" para dar dos raíces reales, debe haber un valor del parámetro a para el cual, ambas raíces coincidan, es decir, es necesario atravesar los ceros del discriminante $\Delta(a)$. En efecto, $\Delta(a)$ resulta ser un polinomio de grado 20 con 15 de sus raíces muy cercanas a 0, y en particular, existe una raíz a entre 0 y 10^{-9}. Es decir, que los coeficientes de p son muy cercanos a los coeficientes de un polinomio con una raíz múltiple.

1.2. **A-discriminantes.** Fijemos un conjunto finito $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ de puntos enteros en $\mathbb{Z}^d$ y consideremos el polinomio ralo genérico con exponentes en A (y coeficientes variables $x = (x_1, \ldots, x_n)$):

$$f_A(t) \;=\; f_A(x;t) \;=\; x_1 t^{a_1} + \cdots + x_n t^{a_n}\,, \quad t = (t_1, \ldots, t_d).$$

Llamemos Z_A a la variedad

$$\{x \in \mathbb{C}^n \,/\, \text{existe}\, t \in (\mathbb{C}^*)^d \,\text{tal que}\, f_A(t) = \frac{\partial f_A}{\partial t_1}(t) = \cdots = \frac{\partial f_A}{\partial t_d}(t) = 0\}.$$

Cuando Z_A es una hipersuperficie, es decir tiene codimensión 1, existe un polinomio irreducible $\Delta_A \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ definido salvo signo tal que $Z_A = \{\Delta_A = 0\}$ [10]. Notemos que si $\Delta_A(x) \neq 0$, la hipersuperficie $\{t \in (\mathbb{C}^*)^d \,/\, f_A(t) = 0\}$ es no singular. Cuando la codimensión de Z_A no es 1, definimos el A-discriminante como el polinomio constante 1.

Mencionemos que es posible asociar a A una variedad tórica proyectiva cuya variedad dual es precisamente la variedad discriminantal Z_A. Asimismo, el Problema 16 de Hilbert, que concierne la clasificación topológica de curvas reales no singulares definidas por polinomios reales bivariados, lleva al estudio de las componentes conexas del complemento de una variedad discriminantal.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1.1. Si $A = \{0, 1, 2\} \in \mathbb{Z}$, el polinomio genérico ralo $f_A(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2$ es simplemente el polinomio genérico de grado dos que consideramos en §1.1, y el discriminante ralo $\Delta_A = x_2^2 - 4x_1x_3$ es el polinomio $\Delta(x_3, x_2, x_1)$ en (1.1).

Ejemplo 1.2. Sea $A = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$ el conjunto de vértices del cuadrado unitario en el plano. En este caso, $f_A(t) = x_1 + x_2 t_1 + x_3 t_2 + x_4 t_1 t_2$ y el discriminante ralo es simplemente $\Delta_A(x) = x_1 x_4 - x_2 x_3$.

Ejemplo 1.3. Supongamos que $A \subseteq \mathbb{Z}^2$ es el conjunto de los 10 puntos enteros del triángulo con vértices en el origen, en $(3,0)$ y en $(0,3)$. Entonces, f_A es un polinomio cúbico genérico en 2 variables y Δ_A (el discriminante de una curva elíptica general) es un polinomio de grado 12 en 10 variables con 2.040 monomios.

Recordemos que dado un polinomio de Laurent $g(x) = \sum_{\alpha \in F} c_\alpha x^\alpha$ (donde F es un subconjunto finito de $\mathbb{Z}^m$), el polítopo de Newton $N(g)$ de g es la cápsula convexa en $\mathbb{R}^m$ del conjunto de exponentes presentes en g con coeficiente no nulo $\{\alpha \in F \,/\, c_\alpha \neq 0\}$. Conocer el polítopo de Newton de un polinomio permite estudiar su comportamiento asintótico.

Algunos problemas en este contexto son:

Dado un conjunto finito A de puntos con coordenadas enteras:

1. ¿ Qué monomios aparecen en Δ_A?, o ¿Cuál es el polítopo de Newton $N(\Delta_A)$?
2. ¿ Qué grado tiene Δ_A?
3. ¿ Qué coeficientes aparecen?
4. ¿ Cuándo es Z_A una hipersuperficie?

Cuando A consiste de $d+2$ puntos mínimamente afínmente dependientes (un *circuito*), como en los ejemplos 1.1 y 1.2, las respuestas a estas preguntas son conocidas, y relativamente sencillas. Hay respuestas parciales a estas preguntas en [10] en el caso general, donde $N(\Delta_A)$ es descripto combinatoriamente en términos de triangulaciones regulares de la cápsula convexa de A con simplices cuyos vértices están en A. El caso de codimensión dos (es decir, cuando A tiene $d+3$ puntos, y la dimensión de su cápsula convexa es d) ha sido abordado en [9, 17], incluyendo algoritmos para el cálculo de A-discriminantes.

En vez de hacer definiciones generales y citar resultados precisos, nos limitaremos en esta exposición a desarrollar un ejemplo elemental de codimensión dos para ilustrar algunos de estos resultados.

Ejemplo 1.4. El polinomio univariado genérico de grado 3

Tomemos $A = \{0,1,2,3\} \subset \mathbb{Z}$. El polinomio genérico ralo $f_A(t) = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + x_3 t^3$ es simplemente el polinomio genérico de grado 3 en una variable y el discriminante es en este caso

$$\Delta_A \;=\; -27x_0^2x_3^2 + x_1^2x_2^2 - 4x_1^3x_3 - 4x_0x_2^3 + 18x_0x_1x_2x_3.$$

El polítopo de Newton $N(\Delta_A)$ es la cápsula convexa en $\mathbb{R}^4$ del conjunto $\{(2,0,0,2),(0,2,2,0),(0,3,0,1),(1,0,3,0),(1,1,1,1)\}$. Notemos que $N(\Delta_A)$ es de hecho un polígono contenido en el plano $\{\alpha \in \mathbb{R}^4 \,/\, \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 4\,,\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 6\}$. En particular, Δ_A es un polinomio homogéneo de grado 4 y la dimensión de $N(\Delta_A)$ es igual al cardinal de A menos 2. Es fácil comprobar que de hecho $N(\Delta_A)$ es un cuadrilátero con vértices en los puntos $(2,0,0,2),(0,2,2,0),(0,3,0,1),(1,0,3,0)$, y el quinto punto resulta ser un punto interior.

Observemos por otro lado la cápsula convexa de A, es decir el segmento $I = [0,3]$ en la recta real. Hay cuatro “ triangulaciones” o particiones posibles de I, es decir, cuatro subdivisiones en simples de dimensión 1, o sea segmentos:

- $T_1 = \{[0,3]\}$.
- $T_2 = \{[0,1],[1,3]\}$
- $T_3 = \{[0,2],[2,3]\}$
- $T_4 = \{[0,1],[1,2],[2,3]\}$

Notemos que si en cada caso multiplicamos los valores de ℓ^ℓ, donde ℓ recorre las longitudes de los segmentos en la triangulación, obtenemos respectivamente $3^3 = 27; 1^1 2^2 = 4; 2^2 1^1 = 4$ y $1^1 1^1 1^1 1^1 = 1$, que son salvo signo los coeficientes de los monomios en Δ_A que corresponden a los 4 vértices del polítopo de Newton. Estos vértices pueden recuperarse a partir de las 4 triangulaciones de la siguiente manera: a cada triangulación T_i, $i = 1,2,3,4$, asignémosle el vector $\beta_i \in \mathbb{Z}^4$ cuya j-ésima coordenada, $j = 0,1,2,3$, es igual a la suma de las longitudes de los segmentos en la triangulación T_i para los cuales el punto j es un extremo. Entonces los vértices son los puntos $\beta_i - (1,0,0,1)$.

Se llama un dual de Gale de A, a una colección de 4 vectores enteros en el plano b_0, b_1, b_2, b_3 tales que la matriz $B \in \mathbb{Z}^{4\times 2}$ cuyas filas son los vectores b_i, verifica que sus columnas generan sobre $\mathbb{Z}$ las relaciones enteras de dependencia afín entre los puntos de A. En nuestro caso, podemos por ejemplo tomar los vectores $b_0 = (1,0), b_1 = (-2,1), b_2 = (1,-2), b_3 = (0,1)$. Si dibujamos los vectores en el plano, las semirrectas por el origen que generan parten el plano en cuatro conos convexos, que corresponden precisamente a las 4 triangulaciones de I.

Ordenemos los vectores b_i en sentido antihorario, y consideremos el cuadrilátero Q construido a partir del origen yuxtaponiendo estos vectores, es decir, con vértices en $(0,0),(1,0),(1,1)$ y $(-1,2)$. Notemos que Q tiene un único punto entero interior, el $(0,1)$. Asociemos a cada vector $b_i = (b_{i1}, b_{i2})$ la transformación lineal $\det_i(m) = \det(b_i, m) = b_{i1}m_2 - b_{i2}m_1$. Llamemos ν_i (resp. μ_i) al mínimo (resp. máximo) de la funcional $\det_i$ sobre Q, para $i = 0,1,2,3$. Resulta $\nu = (0,-3,0,-1)$, $\mu = (2,0,3,1)$. El polítopo de Newton $N(\Delta_A)$ es la imagen de Q por la transformación afín que envía el vector m del plano al vector de $\mathbb{R}^4$ cuya i-ésima coordenada es igual a $\det_i(m) - \nu_i$, $i = 0,1,2,3$. En particular, vértices van a vértices, y es posible calcular el grado y las homogeneidades del discriminante, como ya vimos.

Asimismo, es posible recuperar la longitud de I (que es el grado de la variedad tórica asociada a A) a partir de B de dos maneras diferentes. Por un lado, como la semisuma de los máximos μ_i: $\frac{1}{2}(2+0+3+1) = 3$, y por otro, como el producto 2×2 de la suma de las coordenadas positivas en cada una de las dos columnas de B menos un índice asociado a los vectores b_1, b_2 que viven en el interior de cuadrantes opuestos y que se define como el mínimo de los módulos $|b_{11}b_{22}| = 4$ y $|b_{12}b_{21}| = 1$.

Todas las propiedades que hemos enunciado son un caso particular de teoremas generales.

2. Resultantes

2.1. **Una breve introducción.** Comencemos con dos ejemplos clásicos.

Ejemplo 2.1. Polinomios en una variable

Fijemos dos enteros positivos d_1, d_2 y consideremos polinomios genéricos en una variable con estos grados:

$$f(t) = \sum_{i=0}^{d_1} a_i t^i\,, \quad g(t) = \sum_{i=0}^{d_2} b_i t^i\,.$$

El sistema $f(t) = g(t) = 0$ es en general sobredeterminado y no tiene solución. Es clásicamente conocido que existe un polinomio irreducible $R_{d_1,d_2}(f,g) = R_{d_1,d_2}(a_0, \dots, a_{d_1}, b_0, \dots, b_{d_2})$ con coeficientes enteros e irreducible llamado la *resultante* de f y g, cuya anulación en los coeficientes de f y g es equivalente al hecho de que los dos polinomios tengan alguna raíz compleja en común. Geométricamente, la hipersuperficie $\{(a,b) \in \mathbb{C}^{d_1+d_2+2} \,/\, R_{d_1,d_2}(a,b) = 0\}$ es la proyección de la variedad de incidencia $\{(a,b,t) \in \mathbb{C}^{d_1+d_2+3} \,/\, \sum_{i=0}^{d_1} a_i t^i = \sum_{i=0}^{d_2} b_i t^i = 0\}$; o sea, se ha eliminado la variable t.

Un conocido teorema de Sylvester permite calcular la resultante como el determinante de una matriz de tamaño $d_1 + d_2$ cada una de cuyas entradas es un coeficiente de alguno de los polinomios, o cero. Por ejemplo, si $d_1 = d_2 = 2$, la resultante es el siguiente polinomio en 6 variables $(a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2)$:

$$b_2^2 a_0^2 - 2b_2 a_0 a_2 b_0 + a_2^2 b_0^2 - b_1 b_2 a_1 a_0 - b_1 a_1 a_2 b_0 + a_2 b_1^2 a_0 + b_0 b_2 a_1^2$$

y se calcula como el determinante de la siguiente matriz 6×6:

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.2. El caso homogéneo

Consideremos $n + 1$ formas genéricas de grado 1 en $n + 1$ variables:

$$f_i(x) \ = \sum_{i=0}^{n} a_{ij}\, x_j\,, \quad i = 0, \dots, n.$$

Entonces, existe $x \neq 0$ tal que es solución del sistema lineal homogéneo $f_0(x) = \cdots = f_n(x) = 0 \Leftrightarrow \det(a_{ij}) = 0$. Es decir, que el determinante es un polinomio en los coeficientes de las formas dadas que permite resolver el problema de eliminación de decidir si existe o no una solución no trivial del sistema.

En general, fijados grados $d_0, \ldots, d_n$, consideremos polinomios homogéneos genéricos con estos grados

$$f_i(x) = \sum_{\{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \ / \ |\alpha| = d_i\}} a_\alpha^i \, x^\alpha.$$

Cayley, Sylvester, Bézout y Macaulay demostraron la existencia de un polinomio irreducible $\mathrm{Res}_{d_0,\ldots,d_n} \in \mathbb{Z}[a_\alpha^i, \, i = 0, \ldots, n, |\alpha| = d_i]$ que se anula en los coeficientes de $f_0, \ldots, f_n$ si y sólo si existe una raíz común $x \neq 0$ no trivial del sistema $f_0(x) = \cdots = f_n(x) = 0$, es decir, si y sólo si existe una raíz común en el espacio proyectivo compacto $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Cuando todos los grados son iguales a 1, $\mathrm{Res}_{1,\ldots,1}$ coincide con el determinante del sistema lineal.

Así como el determinante de un sistema lineal puede utilizarse no sólo para verificar la existencia de soluciones no triviales de un sistema homogéneo, sino que puede utilizarse también para calcular la solución de un sistema no homogéneo, es posible utilizar las resultantes para "resolver" sistemas algebraicos no lineales. Dados $g_1, \ldots, g_n$ polinomios de grados respectivos $d_1, \ldots, d_n$, denotemos por $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ sus respectivas homogeneizaciones $f_i = x_0^{d_i} g_i(x_1/x_0, \ldots, x_n/x_0)$. El polinomio univariado $h_1(x) = \mathrm{Res}_{1,d_1,\ldots,d_n}(x_1 - x, f_1, \ldots, f_n)$ se anula en todos aquellos puntos $x \in \mathbb{C}$ que sean la primer coordenada de una raíz común en de los polinomios $g_1, \ldots, g_n$. Es decir, usando resultantes es posible eliminar $n-1$ variables, y reducir la búsqueda de las raíces comunes de un sistema multivariado a la búsqueda de raíces de polinomios en una variable.

Por supuesto, esto es útil únicamente si podemos asegurar que el polinomio obtenido no es idénticamente cero. Una condición necesaria es que los polinomios $g_1, \ldots, g_n$ tengan finitas raíces comunes. Observemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.3. Polinomios con "soporte cuadrado"

Consideremos los siguientes polinomios genéricos ralos con soporte en el cuadrado unitario:

$$f_i = a_i + b_i t_1 + c_i t_2 + d_i t_1 t_2 \,, \quad i = 0, 1, 2.$$

Para coeficientes genéricos, estos 3 polinomios en 2 variables de grado 2 no tienen raíces comunes en $\mathbb{C}^2$. Sin embargo, sus homogeneizados se anulan en los puntos $(t_0, t_1, t_2) = (0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$, para toda elección de coeficientes. Por lo tanto $\mathrm{Res}_{2,2,2}(f_0, f_1, f_2) \equiv 0$, y no provee ninguna información.

Es necesario entonces considerar resultantes "a medida", de acuerdo al soporte de los polinomios. Esto ha conducido a la noción de A-resultantes, o más generalmente, de $(A_0, \ldots, A_n)$-resultantes, donde A_i, $i = 0, \ldots, n$, son subconjuntos finitos de puntos enteros en $\mathbb{Z}^n$ [10, 14, 15]. La familia de soportes $(A_0, \ldots, A_n)$ se dice *esencial* cuando para todo subconjunto propio $J = \{i_1, \ldots, i_j\}$ de $\{0, \ldots, n\}$, la menor variedad afín que contiene a los puntos de la suma de Minkowski $\{a_{i_1} + \cdots + a_{i_j} \,/\, a_{i_k} \in A_{i_k}\,,\ k = 1, \ldots, j\}$ es de dimensión mayor o igual que j. Si esta propiedad se verifica, entonces existe un polinomio irreducible con coeficientes enteros $\mathrm{Res}_{(A_0,\ldots,A_n)}(f_{A_0}, \ldots, f_{A_n})$ definido salvo signo, que se anula cuando existe un punto $t \in (\mathbb{C}^*)^n$ que es una raíz común de los polinomios ralos $f_{A_0}, \ldots, f_{A_n}$ con soporte en $A_0, \ldots, A_n$ respectivamente. De hecho, la resultante se anula si y sólo si las clausuras de las hipersuperficies $\{t \in (\mathbb{C}^*)^n \,/\, f_{A_i} = 0\}$ $(i = 0, \ldots, n)$ tienen intersección vacía en una apropiada compactificación tórica de $(\mathbb{C}^*)^n$ asociada a la familia de soportes.

En la última década, el uso de resultantes como una herramienta computacional para la resolución de sistemas de ecuaciones polinomiales, ha renovado ampliamente el interés en su estudio y en la búsqueda de fórmulas explícitas para su cálculo [6, 7].

2.2. **Relación entre discriminantes y resultantes.** Veremos cómo es posible obtener discriminantes a partir de resultantes, y recíprocamente. Comencemos por un ejemplo.

Ejemplo 2.4. Fijemos $A = \{0, 2, 3, 6\} \in \mathbb{Z}$, $f_A(t) = x_0 + x_2 t^2 + x_3 t^3 + x_6 t^6$, $f'_A(t) = 2x_2 t + 3x_3 t^2 + 6x_6 t^5$. Notemos que el polinomio $t f'_A(t)$ tiene soporte contenido nuevamente en A, y las mismas raíces que f'_A en $\mathbb{C}^*$. Como el A-discriminante Δ_A se anula cuando los polinomios f_A y $t f'_A$ tienen una raíz común no nula, y la resultante $\mathrm{Res}_{(A,A)}$ se anula en un par de polinomios cuando tienen una raíz común no nula, parecería que ambos polinomios coinciden. Sin embargo,

$$\mathrm{Res}_{(A,A)}(f_A, t f'_A(t)) \;=\; x_0\, x_6^2\, \Delta_A(x).$$

Es decir, que el discriminante es factor de la resultante, pero han aparecido otros.

En general, fijado un conjunto finito $A \subset \mathbb{Z}^n$, llamemos *discriminante total* al polinomio $E_A = \mathrm{Res}_{(A,\ldots,A)}(f_A, t_1\frac{\partial f_A}{\partial t_1}, \ldots, t_n\frac{\partial f_A}{\partial t_n})$. Entonces, tenemos la factorización

$$E_A = \prod_{A' \subseteq A\,,\, A' \,\text{facial}} \Delta_{A'}^{\delta_{A'}}, \tag{2.1}$$

donde A' es un subconjunto facial de A si se obtiene como la intersección de A con una de las caras de su cápsula convexa, y los exponentes $\delta_{A'}$ son enteros positivos. Estos exponentes en general no son explícitos pero siempre $\delta_A = 1$.

Ejemplo 2.5. Consideremos $A = \{a_1 = (0,0), a_2 = (1,0), a_3 = (2,0), a_4 = (0,1), a_5 = (0,2)\}$, y notemos como antes $f_A(t) = x_1 t^{a_1} + \ldots x_5 t^{a_5}$ el polinomio bivariado genérico con exponentes en A. Entonces, el discriminante $\Delta_A = 4x_1x_3x_5 - x_2^2x_5 - x_3x_4^2$ y A tiene 6 subconjuntos faciales propios, los tres vértices a_1, a_3, a_5 y los tres lados del triángulo que es la cápsula convexa de A. Entonces, $\Delta_{\{a_3,a_5\}} = 1$ y el discriminante total se factoriza como

$$E_A(x) \,=\, x_1\, x_3\, x_5\, (x_1x_3 - 4x_2^2)\,(x_1x_5 - 4x_4^2)\,\Delta_A(x).$$

Veamos ahora como presentar la resultante de una familia esencial como un discriminante, mediante lo que se conoce con el nombre de *Cayley trick*, ya que Cayley fue el primero en proponerlo. Dados $A_0, \ldots, A_n \subset \mathbb{Z}^n$, definamos la configuración de Cayley asociada $A \subset \mathbb{Z}^{2n+1}$ como

$$A \,=\, e_0 \times A_0 \cup \cdots \cup e_n \times A_n,$$

donde e_i es el i-ésimo vector de la base canónica en Z^{n+1}.

Ejemplo 2.6. Supongamos que $n = 1$, $A_0 = \{0,1,2\}$ y $A_1 = \{0,1\}$. Entonces $e_0 = (1,0), e_1 = (0,1)$ y la configuración de Cayley asociada $A = \{(1,0,0),(1,0,1),(1,0,2),(0,1,0),(0,1,1)\}$ consta de 5 puntos cuya cápsula convexa es un trapecio en el plano $\{v \in \mathbb{R}^3 \,/\, v_1 + v_2 = 1\}$.

Claramente, las configuraciones de Cayley son muy especiales. Notemos que el polinomio genérico ralo con exponentes en A se escribe como

$$f_A(y_0, \ldots, y_n, t_1, \ldots, t_n) = \sum_{i=0}^{n} y_i f_{A_i}(t),$$

donde f_{A_i} es el polinomio genérico ralo con exponentes en A_i para $i = 0, \ldots, n$. Luego, la derivada parcial de f_A con respecto a la variable y_i es precisamente f_{A_i}. Si $A_0, \ldots, A_n$ es esencial, resulta que

$$\mathrm{Res}_{(A_0,\ldots,A_n)} = \Delta_A.$$

Sin embargo, hay una propiedad importante que permite distinguir entre discriminantes y resultantes. Con este fin, introduzcamos los sistemas A-hipergeométricos.

3. Funciones hipergeométricas

El estudio de las funciones hipergeométricas en una variable se remonta a Euler, Gauss y Riemann, y desde entonces numerosos matemáticos encontraron aplicaciones y generalizaciones. Es imposible resumir en unos pocos minutos todo este mundo. Nos restringiremos a recordar la definición de la función hipergeométrica clásica de Gauss para motivar la definición de las funciones A-hipergeométricas debida a Gelfand, Kapranov y Zelevinsky, una hermosa generalización de la noción de función hipergeométrica multivariada que engloba gran parte de todos los desarrollos anteriores [11, 16].

3.1. **La función hipergeométrica de Gauss como función A-hipergeométrica.** Dados 3 parámetros complejos a, b, c con $c \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ (o si $c \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$, entonces $a - c \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$), la función hipergeométrica de Gauss $F(a, b, c; x)$ se define para $|x| < 1$ como

$$F(a,b,c;x) = \sum_{n\geq 0} \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)b(b+1)\ldots(b+n-1)}{c(c+1)\ldots(c+n-1)} \frac{x^n}{n!}.$$

Por ejemplo, $F(a, b, b.x) = (1-x)^{-a}$, $-xF(1, 1, 2; x) = \log(1-x)$.

Es fácil verificar que $F(a, b, c; x)$ satisface la ecuación diferencial lineal ordinaria

$$x(1-x)\, y'' + (c - (a+b+1)x)\, y' - ab\, y = 0, \tag{3.1}$$

y si llamamos $F(a,b,c;x) = \sum_{n\geq 0} A_n\, x^n$, el cociente A_{n+1}/A_n es una función racional de n. La ecuación (3.1) tiene tres puntos singulares regulares en $0, 1$ e ∞, y es, salvo normalización, la forma general de una ecuación diferencial lineal ordinaria de segundo orden con esta propiedad.

Podemos reformular esta ecuación diferencial en 4 variables. Dada una función univariada $F(x)$, llamemos

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^{c-1} x_2^{-a} x_3^{-b}\, F(\frac{x_1 x_4}{x_2 x_3}).$$

Entonces, G satisface las siguientes ecuaciones diferenciales lineales parciales, que son simplemente versiones infinitesimales de condiciones de homogeneidad:

$$\left\{\begin{array}{llcl} (1) & (x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + x_3\partial_3 + x_4\partial_4 + (a+b+1-c))(G) & = & 0 \\ (2) & (x_2\partial_2 + x_4\partial_4 + a)G & = & 0 \\ (3) & (x_3\partial_3 + x_4\partial_4 + b)(G) & = & 0 \end{array}\right.$$

Más aún, F satisface la ecuación de Gauss (3.1) $\Leftrightarrow$ G satisface la ecuación (4) $(\partial_1\partial_4 - \partial_2\partial_3)(G) = 0$. La ecuación de Gauss es equivalente al sistema de ecuaciones lineales en derivadas parciales dado por las cuatro ecuaciones $(1), (2), (3), (4)$ anteriores. Este es el sistema A-hipergeométrico asociado a la matriz entera 3×4 cuyas columnas están dadas por los vectores $(1,0,0), (1,1,0), (1,0,1), (1,1,1)$ y al vector $\beta = (c-1-a-b, -a, -b)$.

3.2. **Los sistemas A-hipergeométricos y sus soluciones racionales.** En general, dado un subconjunto $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{Z}^d$, consideramos la matriz (con igual nombre) $A \in \mathbb{Z}^{(d+1)\times n}$ cuyas columnas son los vectores $(1, a_1), \ldots, (1, a_n) \in \mathbb{Z}^{d+1}$. Para cada vector $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_d) \in \mathbb{C}^d$, el sistema A-hipergeométrico con parámetro β es el ideal $H_A(\beta)$ en el álgebra de Weyl en n variables generado por los operadores de Euler $\sum_{i=1}^n x_i\partial_i - \beta_0$, y $\sum_{i=1}^n a_{ij}x_i\partial_i - \beta_j$, para todo $j = 1, \ldots, d$ y por los siguientes operadores con coeficientes constantes de orden superior: para cada vector $v \in \mathbb{Z}^n$ tal que $A \cdot v = 0$, escribamos $v = v_+ - v_-$, $v_+, v_- \in \mathbb{N}_0^n$ y consideremos el operador $\frac{\partial^{|v_+|}}{\partial v_+} - \frac{\partial^{|v_-|}}{\partial v_-}$.

Decimos que una función holomorfa definida en un abierto de $\mathbb{C}^n$ es A-hipergeométrica (con parámetro β) si es una solución del sistema de ecuaciones diferenciales en n variables definido por los operadores en $H_A(\beta)$. Este sistema es holónomo regular, y para vectores β genéricos, su rango holonómico es el volumen normalizado de la cápsula convexa de A. El lugar singular del sistema coincide con los ceros del discriminante total $\{E_A = 0\}$.

Ejemplo 3.1. Para el sistema equivalente al sistema de Gauss que definimos en la sección §3.1, el lugar singular es la hipersuperficie definida por $\{x_1x_2x_3x_4(x_1x_4 - x_2x_3) = 0\}$, y el rango holonómico, es decir la dimensión del espacio de soluciones locales holomorfas en un punto fuera del lugar singular, es igual a 2.

Un problema importante en este contexto es el estudio de la monodromía de las funciones A-hipergeométricas. Este es actualmente un problema abierto, del cual sólo hay respuestas cuando la dimensión del núcleo de A es 1, que se reduce al caso clásico de una variable, y para ciertos casos particulares en dos variables. En particular, un problema es caracterizar las funciones A-hipergeométrias invariantes por la monodromía, es decir, estudiar las soluciones racionales de $H_A(\beta)$ para β necesariamente entero (y resonante).

Dado que el lugar singular está descripto por los ceros del discriminante total y en vista de la factorización (2.1), una función A-hipergeométrica racional tiene como denominador un producto de ciertas potencias de Δ_A y de los discriminantes de subconfiguraciones faciales de A. Tenemos el siguiente resultado [4]:

Teorema 3.2. *Para configuraciones generales, el discriminante Δ_A aparece en el denominador de una función A-hipergeométrica racional (para algún parámetro entero β) $\Leftrightarrow$ A es la configuración de Cayley asociada a una familia esencial $A_0, \ldots, A_n$. Por lo tanto, un A-discriminante aparece en el denominador de una función A-hipergeométrica racional si y sólo si el discriminante es de hecho una resultante* $\mathrm{Res}_{(A_0,\ldots,A_n)}$. *Más aún, todas las soluciones racionales que no son polinomios de Laurent, se expresan en términos de residuos.*

Por ejemplo, si consideramos el sistema A-hipergeométrico asociado al polinomio univariado genérico de grado dos, es decir al subconjunto $A = \{0, 1, 2\}$ del ejemplo 1.1, la función $(x_2^2 - 4x_1x_3)^{-1/2}$ es A-hipergeométrica (con parámetro $(-1, -1)$), pero no existe ninguna solución racional con polos en la variedad discriminantal $\{\Delta_A = 0\}$.

No hemos definido en esta breve exposición la noción de configuración general que aparece en el enunciado del Teorema 3.2, pero tiene un significado muy preciso y alude a una propiedad que se verifica genéricamente. El resultado es también cierto para *todas* las configuraciones de dimensión uno, dos o tres, o de codimensión uno, y para las configuraciones de Lawrence [3, 4, 5]. La conjetura es que el teorema vale para cualquier configuración A, y demostrarla completamente es actualmente un problema abierto cuya solución implicaría resolver sutiles problemas de clasificación geométrica y problemas diofánticos.

Referencias

[1] L. Blum, F. Cucker, M. Shub and S. Smale: Complexity and Real Computation, Springer, 1997.

[2] F. Catanese: Review of the book [10]. *Bulletin AMS* **37 (2)** (2000) 183–198.

[3] E. Cattani, C. D'Andrea and A. Dickenstein: The A-hypergeometric System Associated with a Monomial Curve, *Duke J. Math.* **99**, N. 2, 179–207,1999.

[4] E. Cattani, A. Dickenstein and B. Sturmfels: Rational Hypergeometric Functions. *Compositio Mathematica* **128** (2001) 217–240.

[5] E. Cattani, A. Dickenstein and B. Sturmfels: Binomial Residues. Por aparecer: *Annales de l'Institut Fourier.*

[6] D. Cox, J. Little and D. O'Shea: Using Algebraic Geometry. Springer, 1998.

[7] C. D' Andrea and A. Dickenstein: Explicit Formulas for the Multivariate Resultant. *Proc. MEGA 2000, Journal of Pure and Applied Algebra* **164/1-2**, 59–86, 2001.

[8] A. Dickenstein: Hypergeometric functions with integer homogeneities. Por aparecer: Proc. Meeting on Complex Analysis (June -July 1998), Eds. F. Norguet and S. Ofman, International Press.

[9] A. Dickenstein and B. Sturmfels: Elimination Theory in Codimension Two. Preprint 294, Instituto Argentino de Matemática y FCEYN, Dto. de Matemática, UBA, 2001.

[10] I. M. Gel'fand, M. Kapranov and A. Zelevinsky: Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants, Birkhäuser, Boston, 1994.

[11] I. M. Gel'fand, A. Zelevinsky and M. Kapranov: Hypergeometric Functions and Toral Manifolds. *Functional Analysis and its Appl.* **23** (1989) 94–106.

[12] I. M. Gel'fand, M. Kapranov and A. Zelevinsky: Newton Polytopes of the Classical Discriminant and Resultant. *Advances in Math.* **84** (1990) 237–254.

[13] I. M. Gel'fand, A. Zelevinsky and M. Kapranov: Discriminants of Polynomials in Several Variables and Triangulations of Newton Polytopes. *Leningrad Math. J.* **2** (1991) 449–505.

[14] B. Sturmfels: Sparse Elimination Theory. In *Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra* (D. Eisenbud, L. Robbiano, eds.), Proceedings, Cortona, June 1991. Cambridge University Press, 1993.

[15] B. Sturmfels, On the Newton polytope of the resultant, *Journal of Algebraic Combinatorics* **3** (1994) 207–236.

[16] M. Saito, B. Sturmfels, and N. Takayama: Gröbner Deformations of Hypergeometric Differential Equations, Algorithms and Computation in Mathematics, Volume **6**, Springer-Verlag, Heidelberg, 2000.

[17] T. M. Sadykov: The Hadamard Product of Hypergeometric Series. Preprint, U. Stockholm, 2001.

ALICIA DICKENSTEIN: DEPARTAMENTO DE MATEMATICA, FCEYN. UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES. (1428) BUENOS AIRES, ARGENTINA

E-mail address: `alidick@dm.uba.ar`