PRÁCTICA III

VARIEDADES TORICAS - 1ER. CUATRIMESTRE 2005

Nota: A lo largo de esta práctica, muchos = deben leerse como "son isomorfos".

Ejercicio 1. Sea Σ (resp. Σ') un abanico racional poliedral en $\mathbb{R}^n$ (resp. en $\mathbb{R}^{n'}$. Probar que

(i) Para cada par de conos $\sigma \in \Sigma$, $\sigma' \in \Sigma'$, $\sigma'' := \sigma \times \sigma'$ es un cono racional poliedral y que la variedad tórica afín $V_{(\sigma'')^\nu} = V_{\sigma^\nu} \times V_{\sigma'^\nu}$ (Cuál es la correspondiente relación entre los anillos de funciones?)

(ii) La coleccion de conos

$$\Sigma \times \Sigma' = \{\Sigma \times \Sigma', \quad \sigma \in \Sigma, \, \sigma' \in \Sigma'\}$$

es un abanico racional poliedral en $\mathbb{R}^{n+n'}$.

(iii) $X_{\Sigma\times\Sigma'} = X_\Sigma \times X_{\Sigma'}$.

Ejercicio 2. Sean $\eta_1 = (2, 1)$, $\eta_2 = (1, 2)$ y sea σ el cono generado por η_1 y η_2. Consideremos las sucesiones

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\beta} Z_3 \longrightarrow 0, \tag{1}$$

donde $\alpha(m) = (< m, \eta_1 >, < m, \eta_2 >)$ y $\beta(a_1, a_2) = (a_1 + a_2)\,(mod\, 3)$, y denotando por G_3 el grupo de raíces cúbicas de la unidad,

$$0 \longrightarrow G_3 \xrightarrow{\beta^*} (\mathbb{C}^*)^2 \xrightarrow{\alpha^*} (\mathbb{C}^*)^2 \longrightarrow 0, \tag{2}$$

donde $\beta^*(\lambda) = (\lambda, \lambda)$ y $\alpha^*(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1^2\theta_2, \theta_1\theta_2^2)$.

(i) Comprobar que (1) y (2) son exactas y que (2) se obtiene de (1) tomando $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\cdot, \mathbb{C}^*)$.

(ii) Consideremos la acción de G_3 en $\mathbb{C}^2$ definida por: $\lambda * (x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$, para todo $\lambda \in G_3$. Denotemos por $(\mathbb{C}[x_1, x_2])^{G_3}$ la subálgebra de los polinomios en dos variables invariantes por la correspondiente acción de G_3. Probar que

$$(\mathbb{C}[x_1, x_2])^{G_3} = \mathbb{C}[x_1^3, x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_2^3].$$

(iii) Sea σ^ν el cono dual de σ. Demostrar que $\sigma^\nu \cap \mathbb{Z}^2$ está generado por $(2, -1), (-1, 2), (1, 0)$, y $(0, 1)$ y que

$$\mathbb{C}[\chi^{(2,-1)}, \chi^{(-1,2)}, \chi^{(1,0)}, \chi^{(0,1)}] = (\mathbb{C}[x_1, x_2])^{G_3},$$

o sea: la variedad tórica afín $V_{\sigma^\nu} = Spec\,\mathbb{C}[\sigma^\nu \cap \mathbb{Z}^2]$ es isomorfa a la variedad cociente de $\mathbb{C}^2$ por la acción de G_3 definida como $Spec\ (\mathbb{C}[x_1, x_2])^{G_3}$.

Ejercicio 3. Sea $A \in \mathbb{Z}^{d\times n}$ de rango d y sean $U \in GL(d,\mathbb{Z})$, $V \in GL(n,\mathbb{Z})$ tales que $S = UAV$ es la forma normal de Smith de A.

¿ Qué calculan las siguientes instrucciones en `maple` (con A, n y d adoptando valores numéricos)?

$>$ ismith(A, U, V);

$> B :=$ transpose(submatrix$(V, [1, 2, ..., n], [n - d + 1, ..., n])$);

Nota: Si $n = 5$, $d = 3$, debe tipearse $[1, 2, 3, 4, 5]$ y $[4, 5]$ y no los puntos suspensivos.

Ejercicio 4. Sea Σ el fan racional poliedral completo en $\mathbb{R}^2$, compuesto de los siguientes 5 conos de dimensión 2 y todas sus caras:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \mathbb{R}_{\geq 0}(1,0) + \mathbb{R}_{\geq 0}(0,1)\\
\sigma_2 &= \mathbb{R}_{\geq 0}(0,1) + \mathbb{R}_{\geq 0}(-1,0)\\
\sigma_3 &= \mathbb{R}_{\geq 0}(-1,0) + \mathbb{R}_{\geq 0}(-1,-1)\\
\sigma_4 &= \mathbb{R}_{\geq 0}(-1,-1) + \mathbb{R}_{\geq 0}(0,-1)\\
\sigma_5 &= \mathbb{R}_{\geq 0}(0,-1) + \mathbb{R}_{\geq 0}(1,0).
\end{aligned}$$

Sea P el polítopo entero con vértices en $(0,0), (2,0), (2,1), (1,2)$ y $(2,0)$. Como Σ es el fan normal a P y refina los fans asociados a $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ y a $\mathbb{P}^2$, existen morfismos naturales de la variedad tórica proyectiva asociada $X_P \subset \mathbb{P}^7$ (notar que P tiene 8 puntos enteros) $f_1 : X_P \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ y $f_2 : X_P \to \mathbb{P}^2$. Describir explícitamente X_P, f_1 y f_2.

Ejercicio 5. Consideremos

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

La variedad tórica X_A es, como sabemos, la clausura de la órbita del punto $p_0 = (1 : 1 : 1 : 1) \in \mathbb{P}^3$ bajo la acción del toro unidimensional:

$$\lambda \cdot (\partial_1 : \partial_2 : \partial_3 : \partial_4) = (\lambda^0 \partial_1 : \lambda^1 \partial_2 : \lambda^2 \partial_3 : \lambda^3 \partial_4), \quad \lambda \in \mathbb{C}^*. \tag{3}$$

Notar que el producto $A \cdot B = 0$, pero que las columnas de B no general $\ker_{\mathbb{Z}}(A)$ (sino que generan un subreticulado del núcleo de índice 3). Sea $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ raíz cúbica primitiva de 1 y llamemos $p_1 = (1 : 1 : \omega : 1)$, $p_2 = (1 : 1 : \omega^2 : 1)$. Denotemos por X_0, X_1 y X_2 las respectivas clausuras de las órbitas del toro por la acción (3) de p_0, p_1 y p_2 respectivamente. En particular, $X_0 = X_A$.

Sean h_1, h_2 los binomios que "se leen" de las columnas de B, o sea: $h_1(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0 x_3^2 - x_2^3$, $h_2(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2 x_3 - x_1^3$. Llamemos $X_B = V(h_1, h_2)$. Probar que

$$X_B = X_0 \cup X_1 \cup X_2$$

y que X_i es la imagen de X_0 bajo la multiplicación coordenada a coordenada por p_i, $i = 1, 2$. Luego, las ecuaciones que describen X_i, $i = 1, 2$, se obtienen "traduciendo" las ecuaciones para $X_0 = X_A$. Escribirlas.