PRÁCTICA I

VARIEDADES TORICAS - 1ER. CUATRIMESTRE 2005

Notación:

Dado un conjunto finito $A = \{u_1, \dots, u_m\} \subset \mathbb{Z}^n$, notemos también por $A \in \mathbb{Z}^{n\times m}$ la matriz con columnas $u_1, \dots, u_m$. Notaremos por g el máximo común divisor de los menores maximales de A y $W_A = \mathbb{R}u_1 + \cdots + \mathbb{R}u_m$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial generado por $u_1, \dots, u_m$. Finalmente, denotaremos por I_A el ideal tórico en n variables

$$I_A := < x^a - x^b \,:\, (a,b) \in \mathbb{N}^{2m}\,,\, \sum_{i=1}^m a_i u_i = \sum_{i=1}^m b_i u_i > .$$

Ejercicio 1. Dado $A = \{u_1, \dots, u_m\} \subset \mathbb{Z}^n$,

(i) Probar que

$$\Gamma := \{(a,b) \in \mathbb{R}^{2m}_{\geq 0} \,:\, \sum_{i=1}^m a_i u_i = \sum_{i=1}^m b_i u_i\}$$

es un cono racional poliedral.

(ii) Si $(a^{(1)}, b^{(1)}), \dots, (a^{(\ell)}, b^{(\ell)})$ generan $\Gamma \cap \mathbb{Z}^{2m}$ (que existen por el Lema de Gordan), el ideal tórico I_A está generado por los binomios $p_1, \dots, p_\ell$ definidos por

$$p_i := x^{a^{(i)}} - x^{b^{(i)}},\ i = 1, \dots, \ell.$$

Ejercicio 2. Supongamos que A tiene rango n, es decir que $W_A = \mathbb{R}^n$ (o equivalentemente, $g \neq 0$.) Probar que la aplicación $\Phi_A : T = (k^*)^n \to k^m$ definida por

$$\Phi_A(x) = (x^{u_1}, \dots, x^{u_m}),$$

es $g - 1$ con la imagen.

Ejercicio 3. Sea Y_A la variedad tórica afín asociada (o sea, el anillo de la variedad es $k[Y_A] = k[y_1, \dots, y_m]/I_A$). Probar que $\dim(Y_A) = \dim_{\mathbb{R}}(W_A)$.

Ejercicio 4. Sea $f \in k[x_1, \dots, x_n]$. Probar que f verifica "$f(x) = 0 \Leftrightarrow f(\lambda x) = 0$", $\forall\, \lambda \in k^*$, para todo $x \in k$, si y solo si f es homogéneo.