ECUACIONES POLINOMIALES Y ALGORITMOS

Segundo Cuatrimestre 2015– Ejercicios para entregar

(**1**) Práctica 1, ej. (4): Probar que el ideal $\langle x, y\rangle \subset \mathbb{K}[x, y]$ no es principal.

(**2**) Práctica 2, ej. (7): Sea $I = \langle Y - X^2, Z - X^3\rangle \subset \mathbb{C}[X, Y, Z]$
- Mostrar que todo $f \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ puede escribirse en la forma :
$$f = a_1(X, Y, Z)(Y - X^2) + a_2(X, Z)(Z - X^3) + r(X)$$
donde $r(X) \in \mathbb{C}[X]$ es un polinomio puro en X.
- ¿ Corresponde esto a efectuar el algoritmo la división para algún orden adecuado ?
- Mostrar que en este caso $f \in I$ si y solo si $r = 0$.

(**3**) Práctica 2, ej. (8): Justificar (sin hacer nuevas cuentas) por qué los polinomios dados en los ejercicios **(4)**, **(5)** y **(6)** no son una base de Gröbner del ideal que generan para los órdenes considerados, mientras que los del ejercicio **(7)** sí lo son para el orden lexicográfico $X < Y < Z$. ¿ Y para un orden graduado lexicográfico ?

(**4**) Práctica 3, ej. (7): Sea $f \in \mathbb{R}[X]$ de grado $n \geq 1$.
(a) Probar que $V(f) + V(f(-X)) \leq n$.
(b) Probar que si f tiene todas sus raíces reales, entonces $Z_+(f) = V(f)$.

(**5**) Práctica 3, ej. (12): Sea $f \in \mathbb{C}[X]$ un polinomio con exactamente k monomios no nulos. Dar una cota para el número total de raíces reales no nulas de f.

(**6**) Práctica 4, ej. (4): (Explicar cómo se hace) Sean a, b, c tales que $a+b+c = 3, a^2+b^2+c^2 = 5$ y $a^3 + b^3 + c^3 = 7$.
(a) Probar que $a^4 + b^4 + c^4 = 9$.
(b) Probar que $a^5 + b^5 + c^5 \neq 11$.
(c) Cuál es el valor de $a^5 + b^5 + c^5$? Explicar por qué se puede predecir de antemano que este valor será constante para tales a, b, c.

(**7**) Práctica 5. ej. (12): El *folium de Descartes* se puede parametrizar por
$$x = \frac{3t}{1+t^3}\ ,\ y = \frac{3t^2}{1+t^3}.$$
Encontrar la ecuación implícita del Folium y demostrar que para $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, la parametrización cubre toda la curva.

(**8**) Práctica 6, ej. (6): Si f, g son dos polinomios no constantes, ¿ es necesariamente cierto que $\sqrt{\langle f^2, g^3\rangle} = \langle f, g\rangle$? ¿ Y si más aún f y g no tienen factores múltiples ?
Sea $I = \langle x^2 + y^2 - 1, y - 1\rangle \subset \mathbb{C}[x, y]$. Hallar $f \in \mathbf{I}_{\mathbb{C}}(\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(I))$ tal que $f \notin I$. ¿Es I radical?

(**9**) Práctica 8, ej. (1): Sean A, B, C, D, E, F puntos en el plano. Denotamos con $\overline{AB}$ el segmento por los puntos A, B, etc. Expresar como la anulación de una o más ecuaciones polinomiales las siguientes afirmaciones:
(a) $\overline{AB}$ es paralelo a $\overline{CD}$.
(b) $\overline{AB}$ es perpendicular a $\overline{CD}$.
(c) A, B y C son colineales
(d) C vive en el círculo de centro A y radio $|A - B|$.
(e) Los ángulos agudos $\angle(ABC)$ y $\angle(DEF)$ son iguales (Sug: Usar que dos ángulos agudos son iguales si y solo si tienen la misma tangente)
(f) El segmento $\overline{BD}$ bisecta el ángulo $\angle(ABC)$.