ECUACIONES POLINOMIALES Y ALGORITMOS

Segundo Cuatrimestre 2011– Práctica 5

Bases de Gröbner y eliminación

En algunos ejercicios, conviene usar Singular.

1. Determinar si $XY^3 - Z^2 + Y^5 - Z^3 \in \langle -X^3 + Y, X^2Y - Z\rangle$ y si $X^3Z - 2Y^2 \in \langle XZ - Y, XY + 2Z^2, Y - Z\rangle$.

2. Usando órdenes lexicográficos puros, determinar exactamente los ceros comunes en $\mathbb{C}^3$ de los polinomios $X^2 + Y^2 + Z^2 - 1$, $X^2 + Y^2 + Z^2 - 2X$ y $2X - 3Y - Z$ y de los polinomios $X^2Y - Z^3$, $2XY - 4Z - 1$, $Z - Y^2$ y $X^3 - 4YZ$.

3. Sea $I = \langle X^2 + 2Y^2 - 3, X^2 + XY + Y^2 - 3\rangle \subset \mathbb{C}[X, Y]$.
- Calcular los ideales $I \cap \mathbb{C}[X]$ e $I \cap \mathbb{C}[Y]$.
- Determinar $\mathbf{V}(I) := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : f(x, y) = 0\ \forall f \in I\}$. ¿ Cuáles de estas soluciones pertenecen a $\mathbb{Q}^2$?

4. Sea $I = \langle X^2 + Y^2 + Z^2 - 4, X^2 + 2Y^2 - 5, XZ - 1\rangle \subset \mathbb{C}[X, Y, Z]$.
- Calcular $I \cap \mathbb{C}[Y, Z]$ e $I \cap \mathbb{C}[Z]$.
- ¿ Cuántas soluciones racionales hay en $\mathbf{V}(I) := \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : f(x, y, z) = 0\ \forall f \in I\}$?

5. Sean $I = \langle (X + Y)^4(X^2 + Y)^2(X - 5Y)\rangle$ y $J = \langle (X + Y)(X^2 + Y)^3(X + 3Y)\rangle$. Calcular $I + J$, $I\,J$ e $I \cap J$.

6. Sean f, $g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.
- Probar que $\langle f\rangle \cap \langle g\rangle$ es un ideal principal. ¿ Quién es h?
- Probar que $\langle f\rangle \cdot \langle g\rangle = \langle f\rangle \cap \langle g\rangle \iff \mathrm{mcd}(f; g) = 1$
- Suponiendo que no se conocen las factorizaciones de f y g, ¿ cómo se hace para calcular h?
- Deducir un algoritmo para calcular $\mathrm{mcd}(f; g)$ sin conocer las factorizaciones de f y g.

7. Sean $f = X^4 + X^3Y + X^3Z^2 - X^2Y^2 + X^2YZ^2 - XY^3 - XY^2Z^2 - Y^3Z^2$ y $g = X^4 + 2X^3Z^2 - X^2Y^2 + X^2Z^4 - 2XY^2Z^2 - Y^2Z^4$.
- Calcular $\langle f\rangle \cap \langle g\rangle$ y $\mathrm{mcd}(f; g)$
- Calcular $\langle f, g\rangle \cap \langle X^2 + XY + XZ + YZ, X^2 - XY - XZ + YZ\rangle$.

8. Sea $f = a_0 + a_1x + \ldots, a_dx^d \in \mathbb{K}[x]$, con $a_d \neq 0$. Definimos el discriminante de f como

$$disc(f) = \frac{1}{a_d}\,\mathrm{Res}(f, f', x).$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, probar que f tiene un factor múltiple (p sea, f es divisible por un polinomio de grado positivo de la forma h^2, con $h \in \mathbb{Q}[x]$), si y solo si $disc(f) = 0$. En particular, el discriminante se anula si y solo si f tiene una raíz compleja de multiplicidad mayor o igual que 2.

9. Consideremos los polinomios $f = x^2y - 3xy^2 + x^2 - 3xy$, $g = x^3y + x^3 - 4y^2 - 3y + 1$.

(a) Calcular $\operatorname{Res}(f, g, x)$.
(b) Calcular $\operatorname{Res}(f, g, y)$.
(c) Qué implica (b) con respecto a f y g?

10. Sean $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$.
(a) Probar que $V(f)$ es infinito cuando f no es constante.
(b) Si f y g tienen un factor común de grado positivo, probar que $V(f, g)$ es infinito.
(c) Si f y g no tienen un factor común de grado positivo, probar que $\operatorname{Res}(f, g, x)$ y $\operatorname{Res}(f, g, y)$ son no nulos y deducir que $V(f, g)$ es finito.
Luego: $V(f, g)$ es infinito si y solo si f y g tienen un factor común no constante.

11. Sea $I = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle \subset \mathbb{K}[x, y, z, w]$, donde

$$f_1 = x^4 - 2xy^2 + zw\,,\ f_2 = wx^2 - w^2 z + y\,,\ f_3 = x^3 + 3w.$$

Calcular las resultantes generalizadas de f_1, f_2, f_3 con respecto a w (es decir, tomar los coeficientes respecto de u_2, u_3 de la resultante $\operatorname{Res}(f_1, u_2 f_2 + u_3 f_3, w)$. Demostrar que estos polinomios no generan $I_1 = I \cap \mathbb{K}[x, y, z]$.

12. El *folium de Descartes* se puede parametrizar por

$$x = \frac{3t}{1+t^3}\,,\ \frac{3t^2}{1+t^3}.$$

Encontrar la ecuación implícita del Folium y demostrar que para $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, la parametrización cubre toda la curva.

13. La *superficie de Enneper* está definida paramétricamente por:

$$x = 3u + 3uv^2 - u^3\,,\ y = 3v + 3u^2 v - v^3\,,\ z = 3u^2 - 3v^2.$$

Encontrar la ecuación de la menor variedad algebraica C que contiene a la superficie de Enneper (o sea, su clausura algebraica). Sobre $\mathbb{C}$, usar el teorema de extensión para ver que las ecuaciones parametrizan todo V (ayuda: calcular una base de Gröbner, que será grande, y buscar allí polinomios que revelen esta propiedad.)