ECUACIONES POLINOMIALES Y ALGORITMOS

Segundo Cuatrimestre 2011– Práctica 1

En lo que sigue notamos $\mathbb{K}[\mathbf{X}] := \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$, donde $\mathbb{K}$ es un cuerpo.

(**1**) Estructura de espacio vectorial del anillo de polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$:
- (a) Probar que $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$ tiene una estructura de $\mathbb{K}$-espacio vectorial y exhibir una base.
- (b) Un polinomio de grado d en 1 variable tiene a lo sumo $d+1$ coeficientes no nulos, o monomios. ¿ Cuántos coeficientes puede tener un polinomio de grado d en 2 variables ?
- (c) ¿ Cuántos coeficientes no nulos puede tener un polinomio homogéneo de grado d en n variables ?
- (d) ¿ Cuántos coeficientes no nulos puede tener un polinomio cualquiera de grado d en n variables ?
- (e) ¿ Cuál es la dimensión del K-espacio vectorial $\mathbb{K}[\mathbf{X}]_{\leq d} = \{ f \in \mathbb{K}[\mathbf{X}] \text{ tal que } f = 0 \text{ ó } \operatorname{gr} f \leq d \}$.

(**2**) Sea $f \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio univariado no nulo y llamemos $f_{red} := \frac{f}{\operatorname{mcd}(f,f')}$. Probar que f_{red} tiene las exactamente las mismas raíces que f, pero simples.

(**3**) Sean $f_1, \ldots, f_s \in \mathbb{C}[x]$ no nulos. Sea $g \in \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ mónico de grado mínimo en el ideal $\langle f_1, \ldots, f_s \rangle$. Probar que $g = \operatorname{mcd}(f_1 \ldots, f_s)$. Deducir que existen $g_1, \ldots, g_s \in \mathbb{C}[x]$ tales que $\operatorname{mcd}(f_1, \ldots, f_s) = g_1 f_1 + \cdots + g_s f_s$.

Dados $f_1 = x^4 - 7x + 6, f_2 = x^2 + 5x - 6$, hallar $g := \operatorname{mcd}(f_1, f_2)$ y g_1, g_2 tales que $g = g_1 f_1 + g_2 f_2$, a partir del algoritmo de Euclides.

(**4**) Probar que el ideal $\langle x, y \rangle \subset \mathbb{K}[x, y]$ no es principal.

(**5**) Sean $f_1, \ldots, f_s \in \mathbb{C}[x]$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
- (a) Los polinomios $f_1 \ldots, f_s$ no tienen ceros comunes.
- (b) $\operatorname{mcd}(f_1, \ldots, f_s\ ) = 1$
- (c) Existen polinomios $h_1, \ldots, h_s \in \mathbb{C}[x]$ tales que $1 = \sum_i h_i f_i$. (es decir, $1 \in \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$, con lo que $= \langle f_1, \ldots, f_s \rangle \mathbb{C}[x]$).

Valen estas equivalencias en $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ para todo n?

(**6**) Recordemos que un subconjunto de $\mathbb{K}^n$ es una (sub)variedad algebraica (afín) de $\mathbb{K}^n$ si es el conjunto de ceros comunes de polinomios en $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$.
- (a) Probar que si $S \subset \mathbb{K}$ es una variedad algebraica propia, entonces S tiene finitos elementos.
- (b) Probar que el cuadrante $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0, y > 0\}$ no es una subvariedad algebraica de $\mathbb{R}^2$.
- (c) Probar que si un polinomio $f \in \mathbb{Q}[\mathbf{X}]$ se anula sobre todos los puntos de $\mathbb{Z}^n$ (los puntos con coordenadas enteras), entonces f es el polinomio nulo.
- (d) Probar que pasa lo mismo si f se anula en el conjunto :

$$\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \text{ tq } 0 \leq x_i \leq \operatorname{gr} f,\ 1 \leq i \leq n \}$$

- (e) ¿ Cuál es la menor subvariedad algebraica de $\mathbb{C}^n$ que contiene a $\mathbb{Z}^n$?

(**7**) El objetivo de este ejercicio es demostrar que todas las curvas con parametrizaciones polinomiales $(f(t), g(t)) \subset \mathbb{K}^2$ están contenidas en variedades algebraicas propias:
- (a) Mostrar que si $f, g \in \mathbb{K}[t]$ son polinomios de grado menor o igual que n, entonces para todo $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, el conjunto de polinomios $\{f(t)^e . g(t)^{e'}, e \geq 0, e' \geq 0, e + e' \leq m\}$ es linealmente dependiente en $\mathbb{K}[t]$.

(b) Deducir que si $C = \{(f(t), g(t)), t \in \mathbb{K}\}$ es una parametrización polinomial de la curva, entonces existe $f \in \mathbb{K}[x, y], f \neq 0$, tal que $C \subset V(f)$.
(c) Lo anterior se puede generalizar fácilmente a cualquier curva $C \subset \mathbb{C}^3$ con parametrización polinomial. Por ejemplo, encontrar $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$ no nulo tal que $V := \{(t^5, t^2, t^3) : t \in \mathbb{C}\} \subset V(f)$. Más aún, probar que V es una variedad algebraica (afí n), es decir, describir V como los ceros comunes de un conjunto finito de polinomios.

(**8**) Probar que si $f_1, \ldots, f_s, g_1, \ldots, g_t \in \mathbb{K}[\mathbf{X}]$ son tales que $\langle f_1, \ldots, f_s \rangle = \langle g_1, \ldots, g_t \rangle$, entonces $V(f_1, \ldots, f_s) = V(g_1, \ldots, g_t)$. Investigar la recíproca.

(**9**) Probar las siguientes igualdades de ideales en $\mathbb{Q}[X, Y]$:
(a) $\langle X + Y, X - Y \rangle = \langle X, Y \rangle$.
(b) $\langle aX + bY, cX + dY \rangle = \langle X, Y \rangle$ si $ad - bc \neq 0,\ a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.
(c) $\langle X + XY, Y + XY, X^2, Y^2 \rangle = \langle X, Y \rangle$.
(d) $\langle 2X^2 + 3Y^2 - 11, X^2 - Y^2 - 3 \rangle = \langle X^2 - 4, Y^2 - 1 \rangle$.