Álgebra Conmutativa

Primer Cuatrimestre 2016

Práctica 6: Adicionales

Ejercicio 1. (Anillos y módulos coherentes) Tenemos:

Definición: Un A-módulo M se dice *coherente* si es de tipo finito, y si todo submódulo $N \subseteq M$ de tipo finito es de presentación finita. Un anillo A se dice coherente si es un A-módulo coherente.

- Sea A un anillo Noetheriano y M un A-módulo de tipo finito. Entonces M es coherente. En particular, A es coherente.
- Sea $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ una sucesión exacta de A-módulos. Probar que si dos de los módulos M, M', M'' son coherentes, entonces los tres son coherentes.
- Sean M_1, M_2 A-módulos coherentes. Probar que $M_1 \oplus M_2$ es coherente. Si además M_1, M_2 son submódulos de un módulo coherente, entonces $M_1 + M_2$ y $M_1 \cap M_2$ son coherentes.
- Un anillo A es coherente si y sólo si todo A-módulo M de presentación finita es coherente.
- Sea A un anillo coherente y $\mathfrak{a} \subseteq A$ un ideal finitamente generado. Probar que $A/\mathfrak{a}$ es un anillo coherente.
- Probar que si A es coherente, entonces toda localización de A es coherente.
- Sea $\mathfrak{X} = (X_i)_i$ una familia infinita de variables. Sea K un cuerpo. Probar que $K[\mathfrak{X}]$ es coherente, pero no Noetheriano.

Ejercicio 2. (Teorema de Chevalley) Sea X un espacio topológico.

- Sea $\mathcal{F}$ la menor colección de subconjuntos de X que contiene todos los subconjuntos abiertos de X y es cerrado con respecto a la formación de intersecciones finitas y complementos.
    (*a*) Probar que $E \subseteq X$ está en $\mathcal{F}$ si y sólo si E es una unión finita de conjuntos de la forma $U \cap C$, donde U es abierto y C es cerrado.
    (*b*) Supongamos que X es irreducible y sea $E \in \mathcal{F}$. Probar que E es denso en X si y sólo si E contiene un abierto no vacío de X.

- Supongamos ahora que X es Noetheriano, y sea $E \subseteq X$. Probar que $E \in \mathcal{F}$ si y sólo si, para cada cerrado irreducible $X_0 \subseteq X$, o bien $\overline{E \cap X_0} \neq X_0$ o $E \cap X_0$ contiene un abierto no vacío de X_0. (Si $E \notin \mathcal{F}$, considerar la colección de cerrados $X' \subseteq X$ tales que $E \cap X' \notin \mathcal{F}$. Esta colección es no vacía, luego admite un elemento minimal X_0. Probar que X_0 es irreducible y que cualquiera de las alternativas anteriores conduce a $E \cap X_0 \in \mathcal{F}$.)

  La familia $\mathcal{F}$ se conoce como los *subconjuntos constructibles* de X.

- Supongamos de nuevo que X es Noetheriano, y sea E un subconjunto de X. Probar que E es abierto en X si y sólo si, para cada cerrado irreducible $X_0 \subseteq X$, o bien $E \cap X_0 = \emptyset$ o bien $E \cap X_0$ contiene un subconjunto abierto no vacío de X. (Usar un argumento similar al ítem anterior)

- Sea A un anillo Noetheriano, $f : A \to B$ un morfismo de anillos de tipo finito (con lo que B es Noetheriano). Sea $X = \mathrm{Spec(A)}, \mathrm{Y} = \mathrm{Spec(B)}$ y sea $f^* : Y \to X$ el morfismo asociado. Probar que la imagen por f^* de un subconjunto constructible de $E \subseteq Y$ es un subconjunto constructible de X. Este resultado se conoce como *teorema de Chevalley*.

- Interpretar el teorema de Chevalley en términos de lógica de primer orden.

Ejercicio 3. (Dominios de Dedekind) Sea A un dominio de Dedekind.

- Probar que un A-módulo M de tipo finito y de torsión se escribe de manera única (salvo orden) como una suma directa finta de módulos $A/\mathfrak{p}_i^{n_i}$, donde los $\mathfrak{p}_i$ son ideales primos no nulos de A.

- Sean $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ ideales en un dominio de Dedekind. Probar que

$$\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}),$$
$$\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cap (\mathfrak{a} + \mathfrak{c}).$$

  (Localizar.)

- (Teorema chino del resto) Sean $\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_n$ ideales de A, y sean $x_1, \cdots, x_n$ elementos de A. Entonces el sistema de congruencias $x \equiv x_i \mod (\mathfrak{a}_i)$ tiene solución $x \in A$ si y sólo si $x_i \equiv x_j \mod (\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j)$ siempre que $i \neq j$.