PRÁCTICA V: DEPENDENCIA ENTERA, DOMINIOS NORMALES, NORMALIZACIÓN Y NULLSTELLENSATZ

ÁLGEBRA CONMUTATIVA - 1ER. CUATRIMESTRE 2016

Nota importante:

(1) En toda la práctica, A denota siempre un anillo conmutativo con unidad 1, y k denota un cuerpo. La referencia [A-M] se refiere al libro de Introducción al Álgebra Conmutativa de Atiyah-Macdonald.

(2) Deben entregar de esta práctica tres ejercicios de la primera sección, y 2 ejercicios de las secciones restantes. Entre estos ejercicios deben estar los marcados con un $(*)$. (En total deben entregar 9 ejercicios.)

1. Extensiones enteras y normales

Definición: Un dominio íntegro A se dice *normal* si A es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones Frac(A).

Ejercicio 1. Sea A un dominio íntegro normal con cuerpo de fracciones K y sea L/K una extensión algebraica de cuerpos. Probar que $x \in L$ es entero sobre A si y sólo si el polinomio minimal de x sobre K tiene coeficientes en A.

Ejercicio 2. El objetivo de este ejercicio es calcular la clausura entera de extensiones cuadráticas.

- Probar que la clausura entera de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ es $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})]$. Se trata de un dominio de factorización única.
- Probar que la clausura entera de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ es $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Probar además que no es un dominio de factorización única.
- Probar que la clausura entera A de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ com m un entero libre de cuadrados, es $A = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}(1+\sqrt{m})]$ si $m \equiv 1 \mod (4)$ y $A = \mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ en otro caso.

Ejercicio 3. $(*)$ Calcular la clausura entera de $A = k[x,y]/\left\langle y^2 - x^3 \right\rangle$ sobre su cuerpo de fracciones.

Ejercicio 4. Sea A un dominio íntegro. Probar que A es normal si y sólo si $A[X]$ es normal.

Ejercicio 5. Decidir verdadero o falso:

- Si A es un dominio normal, entonces todo cociente por ideales primos de A es un dominio normal.
- Si $(A_i, \varphi_{ij})_{i \leq j}$ es un sistema dirigido con A_i dominio normal para cada i, entonces se tiene que el límite directo $\varinjlim_{i \in I} (A_i, \varphi_{ij})_{i \leq j}$ es un dominio normal.

Ejercicio 6. Sea $\varphi : A \to B$ un morfismo de K-álgebras con B de tipo finito. Probar que $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ es un ideal maximal de A para todo maximal $\mathfrak{m} \subseteq B$.

2. Lema de Normalización de Noether y Nullstellensatz

Ejercicio 7. Dar una solución explícita al lema de normalización de Noether para la K-álgebra $K[X_1, X_2]/(X_1X_2)$.

Ejercicio 8. Sea $\mathfrak{m}$ un ideal maximal de $K[X_1, \cdots, X_n]$. Probar que existen polinomios $f_i \in K[X_1, \cdots, X_{i-1}][X_i]$ tales que $\mathfrak{m} = \langle f_1, \cdots, f_n \rangle$ y f_i es un polinomio mónico en X_i.

Ejercicio 9. $(*)$ Sea $f \in K[X_1, \cdots, X_n]$ un polinomio no constante. Probar que existe un morfismo inyectivo de tipo $K[Y_1, \cdots, Y_{n-1}] \to K[X_1, \cdots, X_n]/\langle f \rangle$ definiendo una estructura de $K[Y_1, \cdots, Y_{n-1}]$-módulo libre de rango finito sobre $K[X_1, \cdots, X_n]/\langle f \rangle$.

Ejercicio 10. Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado, y sea $\mathfrak{m}$ un ideal maximal de $A = k[X_1, \cdots, X_r]$. Probar que existe un automorfismo de k-álgebras de A aplicando $\mathfrak{m}$ en $\langle X_1, \cdots, X_r \rangle$.

3. Going up y going down

Ejercicio 11. Sea k un cuerpo y consideremos el anillo $A = k[a_0, a_1]$. Sea B el anillo cociente $B = k[x, a_0, a_1]/\left\langle x^2 + a_1 x + a_0 \right\rangle$. Tenemos una inyección $A \hookrightarrow B$. Probar que B es una extensión entera de A.

Consideremos el ideal maximal de A definido por $\mathfrak{M} = \langle a_0 - 2, a_1 - 3 \rangle$. Sabemos que existe al menos un ideal maximal $\mathfrak{M}'$ en B tal que $\mathfrak{M}' \cap A = \mathfrak{M}$. Encontrar todos los ideales maximales de B con esta propiedad.

Ejercicio 12. Sea A un anillo y Γ un subgrupo finito de automorfismos de A.

- Probar que A es entero sobre $A^\Gamma := \{a \in A : \gamma(a) = a \ \forall \gamma \in \Gamma\}$. Este anillo se llama *el anillo de los* Γ*-invariantes.*
- Sea $\mathfrak{p}$ un primo de A^Γ. y sea $\mathfrak{P}$ el conjunto de primos cuya contracción es $\mathfrak{p}$. Probar que G actúa transitivamente en $\mathfrak{P}$. En particular, $\mathfrak{P}$ es finito.

Ejercicio 13. Sea A un subanillo de B tal que B es entero sobre A, y sea $f : A \to \Omega$ un morfismo de anillos, con Ω un cuerpo algebraicamente cerrado. Probar que f puede extenderse a un morfismo $\tilde{f} : B \to \Omega$.

Ejercicio 14. $(*)$ Sea $f : A \to B$ un morfismo de anillos tal que B es entero sobre su subanillo $f(A)$.

i) Probar que todo primo de A que contiene al núcleo de f es la contraccion J^c de un ideal primo J de B.
ii) Probar que para todo ideal primo J en B, $\dim(B/J) = \dim(A/J^c)$.
iii) Probar que $f^* : \mathrm{Spec(B)} \to \mathrm{Spec(A)}$ es una aplicación cerrada.

4. Anillos de valuación

Ejercicio 15. $(*)$ Sea A un dominio íntegro, y sea K su cuerpo de fracciones. Probar que son equivalentes:

(1) A es un anillo de valuación de K.
(2) Si $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ son dos ideales de A, entonces o bien $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ o $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$.

Decudir que si A es un anillo de valuación y $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A, entonces $A_\mathfrak{p}$ y $A/\mathfrak{p}$ son anillos de valuación de sus cuerpos de fracciones.

Ejercicio 16. Probar que en un anillo de valuación, todo ideal finitamente generado es principal.

Ejercicio 17. Si ν es una valuación aditiva de un cuerpo K, probar las siguientes afirmaciones:

- Dados $a, b \in K$ tales que $\nu(a) \neq \nu(b)$, entonces $\nu(a + b) = \min\{\nu(a), \nu(b)\}$.
- Dados $a_1, \cdots, a_n \in K$ tales que $a_1 + \cdots + a_n = 0$, existen dos índices i, j distintos tales que $\nu(a_i) = \nu(a_j)$.

Ejercicio 18. Sea Γ un grupo abeliano totalmente ordenado. Un subgrupo Δ de Γ se dice *aislado* si $0 \leq \gamma \leq \delta$ y $\delta \in \Delta$ implican $\gamma \in \Delta$.

- Sea A un anillo de valuación y K su cuerpo de fracciones. Probar que $\mathfrak{p} \mapsto A_\mathfrak{p}$ es una biyección que invierte inclusiones, del Spec(A) en el conjunto de anillos B con $A \subseteq B \subseteq K$ tales que B es un anillo de valuación de K. Su inversa está dada mediante la aplicación $B \mapsto \mathfrak{m}_B$, donde $\mathfrak{m}_B$ es el maximal de B.
- Sea A un anillo de valuación con grupo de valores Γ. Para todo subgrupo Δ de Γ sea $\mathfrak{p}_\Delta := \{a \in A : \nu(a) \notin \Delta\}$. Probar que $\Delta \mapsto \mathfrak{p}_\Delta$ define una biyección que revierte inclusiones entre los subgrupos aislados de Γ y Spec(A) (ambos totalmente ordenados por la inclusión).
- Probar que el grupos de valores del anillo de valuación $A_{\mathfrak{p}_\Delta}$ es isomorfo a Γ/Δ y el grupo de valores del anillo de valuación $A/\mathfrak{p}_\Delta$ es isomorfo a Δ.

- Para un grupo abeliano totalmente ordenado arbitrario Γ, sea $A = k[\Gamma]$ el álgebra de grupo de Γ sobre algún cuerpo k. Escribamos los elementos $u \in A$ como sumas finitas $u = \sum_\gamma a_\gamma e^\gamma$. Definimos $\nu : A\ \{0\} \to \Gamma$ aplicando u al $\gamma \in \Gamma$ más chico tal que $a_\gamma \neq 0$. Probar que A es un dominio íntegro y que ν puede extenderse a una valuación ν en K, el cuerpo de fracciones de A, con grupo de valores Γ. En particular $A := \{x \in K : \nu(x) \geq 0\}$ es un anillo de valuación con grupo de valores Γ.
- Sea I un conjunto bien ordenado. Consideremos $\mathbb{Z}^I$ con el orden lexicográfico, es decir, se tiene $(n_i)_{i\in I} < (m_i)_{i\in I}$ si y sólo si $J := \{i \in I : m_i \neq n_i\}$ es no vacío y $n_{i_J} < m_{i_J}$ donde i_J es el menor elemento de J. Probar que $\mathbb{Z}^I$ es un grupo abeliano totalmente ordenado y que para todo $k \in I$ los subconjuntos $\Gamma_{\geq k}$ de $(n_i)_i \in \mathbb{Z}^I$ tales que $n_i = 0$ para todo $i < k$ son subgrupos aislados de $\mathbb{Z}^I$.
- Deducir que para todo cardinal $\mathfrak{l}$ existen anillos de valuación cuyo espectro tiene cardinal al menos $\mathfrak{l}$.
- Deducir que existen anillos conmutativos A en los cuales hay abiertos $U \subseteq \mathrm{Spec(A)}$ que no son de la forma X_f para algún $f \in A$.