Álgebra Conmutativa

Primer Cuatrimestre 2016

Práctica 5: Adicionales

Nota: los primeros tres ejercicios requieren un poco de Teoría de Galois.

Ejercicio 1. (Extensión del lema de Gauss) Sean $A \subseteq B$ anillos tales que A es íntegramente cerrado en B. Sea $h(x) \in A[X]$ un polinomio tal que se factoriza como producto de dos polinomios mónicos $h(x) = f(x)g(x)$ con $f(x), g(x) \in B[X]$. Probar que $f(x)$ y $g(x)$ están en $A[X]$.
Sugerencia: Mirar el ejercicio 8 de [A-M].

Ejercicio 2. Sean $A \subseteq B$ anillos. Probar que A es íntegramente cerrado en B si y sólo si $A[X]$ es íntegramente cerrado en $B[X]$.
Sugerencia: Mirar el ejercicio 9 de [A-M].

Ejercicio 3. Sea A un dominio íntegro normal, sean K su cuerpo de fracciones, L/K una extensión finita de cuerpos y sea B la clausura entera de A en L. Probar que, si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A, entonces el conjunto de ideales primos $\mathfrak{q}$ de B tales que $\mathfrak{q}^c = \mathfrak{p}$ es finito. En otras palabras, el morfismo inducido $\mathrm{Spec(B)} \to \mathrm{Spec(A)}$ tiene fibras finitas.
Sugerencia: Mirar el ejercicio 15 de [A-M].
Comentario: En general, vale que si $A \to B$ es un morfismo finito, entonces las fibras del morfismo inducido $\mathrm{Spec(B)} \to \mathrm{Spec(A)}$ son finitas; veremos que esto es una consecuencia inmediata del hecho que los anillos Artinianos tengan finitos ideales primos.

Ejercicio 4. Dado A un dominio íntegro, si $K = \mathrm{Frac(A)}$ y L/K es una extensión finita de cuerpos, podemos considerar la clausura entera de A en L, que denotamos B. Notemos que $L = \mathrm{Frac(B)}$. La inclusión $A \hookrightarrow B$ induce un morfismo de esquemas afines $X' \to X$ con $X' = \mathrm{Spec(B)}$ y $X = \mathrm{Spec(A)}$, que es suryectiva (de hecho, preservar la dimensión), conocida como la normalización de X. Interpretar geométricamente la normalización de los esquemas afines definidos por $A = k[X,Y]/\left\langle Y^2 - X^3 \right\rangle$ y $B = k[X,Y]/\left\langle Y^2 - X^2(X+1) \right\rangle$.
Nota: La normalización no tiene por qué ser un esquema afín de tipo finito, es decir, B puede no ser una A-álgebra de tipo finito. Vamos a ver después que si A es Noetheriano, esto ocurre, pero en general puede fallar; los ejemplos son debidos a Nagata. Esto es un problema para ciertas aplicaciones geométricas, lo que conduce a restringir a una familia de esquemas conocidos como *esquemas excelentes*.

Definición: Un anillo conmutativo con unidad A se dice *normal* si para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec(A)}$ se cumple que $A_{\mathfrak{p}}$ es un dominio normal.

Ejercicio 5. Probar que un anillo normal es reducido, es decir, no tiene elementos nilpotentes no triviales.

Ejercicio 6. Probar las siguientes afirmaciones:

- Un anillo normal es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones totales.
- Si A es normal, entonces $A[X]$ es normal.
- El límite directo de un sistema dirigido de anillos normales es un anillo normal.

Ejercicio 7. Sea A un anillo. Asumamos que A es reducido, y que tiene finitos primos minimales. Probar que son equivalentes:

- A es un anillo normal.
- A es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones totales.
- A es un producto finito de dominios normales.

Nota: Al igual que para anillos Noetherianos reducidos, hay un criterio para la normalidad sumamente importante, conocido como criterio de normalidad de Serre. Este resultado profundo dice que un anillo Noetheriano es normal si y sólo si cumple las condiciones (R1) y (S2):

(R1) Para todo primo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec(A)}$ de altura $\mathrm{height}(\mathfrak{p})$, se tiene que $A_{\mathfrak{p}}$ es un anillo regular.

(S2) Para todo primo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec(A)}$ se tiene que $\mathrm{depth(A_{\mathfrak{p}})} \geq \mathrm{mín}\{\mathrm{height}(\mathfrak{p}), 2\}$.