PRÁCTICA IV: PRIMOS ASOCIADOS Y SOPORTE

ÁLGEBRA CONMUTATIVA - 1ER. CUATRIMESTRE 2016

Nota importante:

(1) En toda la práctica, A denota siempre un anillo conmutativo con unidad 1, y k denota un cuerpo. La referencia [A-M] se refiere al libro de Introducción al Álgebra Conmutativa de Atiyah-Macdonald.

(2) Deben entregar de esta práctica los ejercicios que tienen un $(*)$, más 3 ejercicios a elección de la primera sección. (En total deben entregar 8 ejercicios.)

1. Descomposición primaria

Definición: Sean A un anillo conmutativo con unidad, $\mathfrak{a} \subseteq A$ un ideal y sea $\text{Ass}(\mathfrak{a})$ el conjunto de ideales primos asociados al ideal $\mathfrak{a}$, es decir los radicales de los ideales primarios en una descomposición primaria minimal de $\mathfrak{a}$. Decimos que un ideal primo $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(\mathfrak{a})$ se dice un *primo aislado* si es minimal entre los elementos de $\text{Ass}(\mathfrak{a})$. Si $\mathfrak{p}$ no es aislado, decimos que que es un *primo embebido*.

Ejercicio 1. Supongamos que $\mathfrak{a} \subseteq A$ es un ideal que admite descomposición primaria. Probar que $\text{Spec}(A/\mathfrak{a})$ tiene sólo finitas componentes irreducibles.

Ejercicio 2. Sea $\mathfrak{a} \subseteq A$ un ideal con descomposición primaria. Si $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$, probar que $\mathfrak{a}$ no tiene primos embebidos.

Ejercicio 3. Sea $A = \mathbb{Z}[X]$, y consideremos $\mathfrak{m} = \langle 2, X \rangle$. Es un ideal maximal. Probar que $\mathfrak{q} = \langle 4, X \rangle$ es $\mathfrak{m}$-primario, pero no es una potencia de $\mathfrak{m}$.

Ejercicio 4. Sea $A = K[X, Y, Z]$, donde K es un cuerpo. Sean $\mathfrak{p}_1 = \langle x, y \rangle, \mathfrak{p}_2 = \langle x, z \rangle, \mathfrak{m} = \langle x, y, z \rangle$. Se tiene que $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ son primos, mientras que $\mathfrak{m}$ es maximal. Sea $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$. Probar que $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{m}^2$ es una descomposición primaria reducida de $\mathfrak{a}$. ¿Qué componentes son aisladas y cuáles son embebidos?

Ejercicio 5. Sea $A = K[X, Y, Z]$ con K un cuerpo. El ideal $\mathfrak{q} = \left\langle X^2, XZ, Z^2, XY - Z^2 \right\rangle \subseteq A$ tiene radical $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}} = \langle X, Z \rangle$.

- Probar que $\mathfrak{q}$ no es primario.
- Probar que la imagen $\overline{\mathfrak{p}}$ en $A/\left\langle XY - Z^2 \right\rangle$ es primo, pero que $\overline{\mathfrak{p}}^2$ no es primario. (Notar $\overline{\mathfrak{p}}^2 = \overline{\mathfrak{q}}$.)

Ejercicio 6. $(*)$ Dado un ideal primo $\mathfrak{P}$ en A, denotemos por $S_{\mathfrak{P}}(0)$ el núcleo del morfismo canónico de A en $A_{\mathfrak{P}}$. Probar que

i) $S_{\mathfrak{P}}(0)$ está contenido en $\mathfrak{P}$.
ii) $\sqrt{S_{\mathfrak{P}}(0)} = \mathfrak{P}$ si y sólo si $\mathfrak{P}$ es un primo minimal de A.
iii) Probar que si $\mathfrak{P}$ es un primo minimal, $S_{\mathfrak{P}}(0)$ está contenido en todo ideal $\mathfrak{P}$-primario y que es $\mathfrak{P}$-primario (es decir, es el menor ideal $\mathfrak{P}$-primario).

Ejercicio 7. Sea A un anillo y $S \subseteq A$ multiplicativamente cerrado. Para todo ideal $\mathfrak{a}$, sea $S(\mathfrak{a})$ la contracción de $S^{-1}\mathfrak{a}$ en A. El ideal $S(\mathfrak{a})$ se llama la *saturación* de $\mathfrak{a}$ con respecto a S. Probar que:

- $S(\mathfrak{a}) \cap S(\mathfrak{b}) = S(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$.
- $S(\sqrt{\mathfrak{a}}) = \sqrt{S(\mathfrak{a})}$.
- $S(\mathfrak{a}) = A$ si y sólo si $\mathfrak{a} \cap S \neq \emptyset$.
- $S_1(S_2(\mathfrak{a})) = (S_1S_2)(\mathfrak{a})$.

Si $\mathfrak{a}$ tiene descomposición primaria, probar que el conjunto de ideales $\{S(\mathfrak{a})\}_{S \subseteq A}$, donde los S son los subconjuntos multiplicativos de A, es finito.

Ejercicio 8. $(*)$ Sea A un anillo Noetheriano y $\mathfrak{p}$ un primo en A. La n-ésima potencia simbólica de $\mathfrak{p}$ se define como el ideal $\mathfrak{p}^{(n)} = S_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}^n)$, donde $S_{\mathfrak{p}} = A - \mathfrak{p}$. Probar que:

- $\mathfrak{p}^{(n)}$ es un ideal $\mathfrak{p}$-primario.
- Si $\mathfrak{p}^n$ tiene descomposición primaria, entonces $\mathfrak{p}^{(n)}$ es su componente $\mathfrak{p}$-primaria.
- Si $\mathfrak{p}^{(m)}\mathfrak{p}^{(n)}$ tiene una descomposición primaria, entonces $\mathfrak{p}^{(m+n)}$ es su componente $\mathfrak{p}$-primaria.
- Se tiene que $\mathfrak{p}^{(n)} = \mathfrak{p}^n$ si y sólo si $\mathfrak{p}^{(n)}$ es $\mathfrak{p}$-primario. Probar que esto ocurre en $A = K[X_1, \cdots, X_r]$ para $\mathfrak{p} = \langle X_i \rangle$.

Ejercicio 9. Sea k un cuerpo y sea $A = k[X,Y]/\left\langle XY, Y^2\right\rangle$. Definimos los morfismos de k-álgebras $\varphi_i : K[T]/\left\langle T^2\right\rangle \to A$ para $i = 1, 2$ dados por $\varphi_1(T) = 0$ y $\varphi_2(T) = Y$. Sea $f_i = \varphi_i^*$ los morfismos inducidos a nivel de espectros de anillos. Probar que existe un abierto denso $U \subseteq \mathrm{Spec(A)}$ tal que $f_1|_U = f_2|_U$ aunque $\varphi_1 \neq \varphi_2$.

Ejercicio 10. Sea k un cuerpo. Calcular Ass(A) para:

- $A = k[T,U]/\left\langle T^2\right\rangle$.
- $A = k[T,U]/\left\langle T^2, TU\right\rangle$.
- $A = B \otimes \kappa(\mathfrak{p})$, donde B es un anillo noetheriano reducido, $\mathfrak{p}$ es un primo de B, $\kappa(\mathfrak{p}) = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$, y la multiplicación en A está dada por $(b,x)(b',x') := (bb', bx' + b'x)$.

Observación: es posible ver que si dados dos morfismos de anillos $f_1, f_2 : B \to A$, si tenemos un abierto $U \subseteq Spec(A)$ tal que $\mathrm{Ass(A)} \subseteq \mathrm{U}$ y $f_1^*|_U = f_2^*|_U$ entonces debe tenerse $f_1 = f_2$. Un tal abierto se dice **esquemáticamente denso**.

2. Descomposición primaria de módulos y soporte

Ejercicio 11. ($*$) Definimos el soporte de M, y lo notamos Supp(M), al conjunto de ideales primos $\mathfrak{p} \subseteq A$ tales que $M_\mathfrak{p} \neq 0$. Probar las siguientes afirmaciones:

- $M \neq 0$ si y sólo si $\mathrm{Supp(M)} \neq \emptyset$.
- $V(\mathfrak{a}) = \mathrm{Supp}(A/\mathfrak{a})$.
- Si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ es una sucesión exacta, entonces $\mathrm{Supp(M)} = \mathrm{Supp(M')} \cup \mathrm{Supp(M'')}$.
- Si $M = \sum_i M_i$, entonces $\mathrm{Supp(M)} = \sum_\mathrm{i} \mathrm{Supp(M_i)}$.
- Si M, N son de tipo finito, entonces $\mathrm{Supp(M \otimes_A N)} = \mathrm{Supp(M)} \cap \mathrm{Supp(N)}$. (Usar el ejercicio 5 de la práctica 2.)

Ejercicio 12. ($*$) Dado un A-módulo M, definimos el conjuntos de ideales primos asociados de M:

$$\mathrm{Ass}(M) = \{\mathfrak{P} = (0:x), \text{para algún } x \in M\}.$$

- Probar que $\mathfrak{P} \in \mathrm{Supp}(M)$ si y solo si existe $x \in M$ tal que $(0:x) \subseteq \mathfrak{P}$.
- Deducir que si A es un anillo Noetheriano, los primos minimales respecto de inclusión en Ass(M) y $\mathrm{Supp}(M)$ son iguales.

Ejercicio 13. ($*$) Sea M un A-módulo de tipo finito. Probar las siguientes afirmaciones:

- $\mathrm{Supp(M)} = \mathrm{V(Ann(M))}$, luego es un subconjunto cerrado de Spec(A).
- Si $\mathfrak{a} \subseteq A$ es un ideal, entonces $\mathrm{Supp(M/\mathfrak{a}M)} = \mathrm{Supp(\mathfrak{a} + Ann(M))}$.
- Si $f : A \to B$ es un morfismo de anillos y M es de tipo finito, entonces $\mathrm{Supp(B \otimes_A M)} = \mathrm{(f^*)^{-1}(Supp(M))}$.

Ejercicio 14. Sea P un conjunto infinito de primos de $\mathbb{Z}$, tal que existen infinitos primos que no están en P y sea M el $\mathbb{Z}$-módulo:

$$M = \bigoplus_{p \in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

Probar que $\mathrm{Supp}(M)$ no es ni cerrado ni abierto en $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

Ejercicio 15. Calcular Ass(M) para $M = \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$.