Álgebra Conmutativa

Primer Cuatrimestre 2016

Práctica 4: Adicionales

Ejercicio 1. Sea $A = k[a,b]/I$ donde $I = \langle a \rangle \cap \langle a,b \rangle^2 = \langle a^2, ab \rangle$.

- Probar que $\langle b^n \rangle$ es $\langle a,b \rangle$-primario en A, y que

  $$0 = \langle a \rangle \cap \langle b^n \rangle$$

  es una descomposición primaria minimal del 0 en A para todo $n \geq 1$.

- Probar que $\langle a + \lambda b^n \rangle$ es $\langle a,b \rangle$-primario para todo $\lambda \in k$ y $n \geq 1$, y que

  $$0 = \langle a \rangle \cap \langle a + \lambda b^n \rangle .$$

  Probar que cada $\langle a + \lambda b^n \rangle$ es maximal entre los ideales $J \subseteq A$ que verifican

  $$0 = \langle a \rangle \cap J ;$$

  luego la longitud de los anillos A/J, para J una componente $\langle a,b \rangle$-primaria del 0, no está acotada.

Ejercicio 2. Sea A un dominio. Asumamos que es Noetheriano. Más adelante vamos a ver que los anillos Noetherianos cumplen que todos sus ideales son descomponibles, y que de hecho, los primos asociados a un ideal $\mathfrak{a}$ son de la forma $(\mathfrak{a} : x)$ para algún $x \in A$.

- Supongamos que $f \in A$ admite una descomposición $f = u \prod_{i=1}^{n} p_i^{e_i}$, donde $u \in A$ es una unidad, los p_i generan ideales primos distintos dos a dos, y cada e_i es un entero positivo. Probar que $\langle f \rangle = \bigcap_{i=1}^{n} \langle p_i^{e_i} \rangle$ es la descomposición primaria minimal de $\langle f \rangle$.

- Probar que A es un DFU si y sólo si todo ideal primo minimal entre los que contienen a un ideal principal es principal.

Ejercicio 3. Sea $A = K[X_1, \cdots, X_r]$ un anillo de polinomios en finitas variables, con K cuerpo, y sea $\mathfrak{p} \subseteq A$ un ideal generado por algunas de las variables X_i. Probar que $\mathfrak{p}$ es primo, y que todas sus potencias $\mathfrak{p}^n$, para $n > 0$, son $\mathfrak{p}$-primarias. En particular, $\mathfrak{p}^{(n)} = \mathfrak{p}^n$ para todo $n > 0$.

Ejercicio 4. Un ideal $I \subseteq k[X_1, \cdots, X_n]$ se dice *monomial* si está generado por monomios en las variables $X_1, \cdots, X_n$.

- Determinar qué ideales monomiales son primos, irreducibles, radicales, primarios.
- Hallar un algoritmo para calcular el radical de un ideal monomial.
- Hallar un algoritmo para calcular una descomposición primaria irredundante de un ideal monomial.

Ejercicio 5. Recordemos que para un anillo A, el anillo de fracciones totales de A, $K(A)$, es la localización respecto del subconjunto multiplicativo de no divisores del cero de A.

- Sea $S \subseteq A$ subconjunto multiplicativo. Probar que $K(S^{-1}A)) = K(S^{-1}K(A))$.
- Sea k un cuerpo, sea $A = k[x, y, z]/ \left\langle x^2, xy, xz \right\rangle$ y sea $\mathfrak{P} = \langle x, y \rangle$. Probar que

  $$K(A) = A_{\langle x,y,z \rangle}, A_{\mathfrak{P}} = k[y, z]_{\langle y \rangle} \text{ y } K(A_{\mathfrak{P}}) = k(y, z).$$

  Concluir que $K(A_{\mathfrak{P}})$ no coincide con $(K(A))_{\mathfrak{P}}$, luego en general tomar cuerpo de fracciones totales no conmuta con localizar. El problema surge de la existencia de primos embebidos en $\left\langle x^2, xy, xz \right\rangle$.
- Si A es un anillo reducido, probar que $K(S^{-1}A) = S^{-1}K(A)$.

Nota: La razón por la cual la hipótesis de reducido elimina contraejemplos como en el ítem 2, tiene que ver con que los anillos Noetherianos son reducidos si y sólo si se cumplen las condiciones (R0) y (S1):

(R0) La localización de A en un primo minimal de $\mathrm{Spec(A)}$ es un cuerpo.

(S1) A no tiene primos embebidos.

Ejercicio 6. Sea A un anillo y M un A-módulo.

- Supongamos que M es un A-módulo de tipo finito. Entonces para todo entero positivo r, se tiene que

  $$U_r := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec(A) : M_{\mathfrak{p}} \text{ puede ser generado sobre } A_{\mathfrak{p}} \text{ por r elementos}}\}$$

es abierto en $\mathrm{Spec}(A)$.

- Supongamos que M es un A-módulo de presentación finita. Entonces para todo entero positivo r, se tiene que

$$U_r := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) : M_{\mathfrak{p}} \text{ es un módulo libre sobre } A_{\mathfrak{p}}\}$$

es abierto en $\mathrm{Spec}(A)$.