PRÁCTICA III: LOCALIZACIÓN

ÁLGEBRA CONMUTATIVA - 1ER. CUATRIMESTRE 2016

Nota importante:
(1) En toda la práctica, A denota siempre un anillo conmutativo con unidad 1, y k denota un cuerpo. La referencia [A-M] se refiere al libro de Introducción al Álgebra Conmutativa de Atiyah-Macdonald.
(2) El ejercicio que tiene una (**T**) significa que requiere un poco de topología.
(3) El ejercicio que tiene una (**N**) significa que requiere un poco de Teoría de Números.
(4) Deben entregar de esta práctica los ejercicios que tienen un $(*)$, más 2 ejercicios a elección por sección. (En total deben entregar 6 ejercicios.)

1. Localización

Ejercicio 1. $(*)$ Sea S un subconjunto multiplicativo de un anillo A y definamos

$$\overline{S} := \{s \in A \,/\, \text{existe}\, t \in A \;\text{ tal que}\, s.t \in S\}.$$

Probar que

i) $\overline{S}$ es un conjunto multiplicativo saturado que contiene a S.
ii) S es saturado si y sólo si $A \backslash S$ es una unión de ideales primos.
iii) $S^{-1}A \simeq \overline{S}^{-1}(A)$.

Probar que el anillo $A = k[x_1, 1/x_1, \ldots, x_n, 1/x_n]$ es isomorfo a los siguientes anillos:

$$A \simeq k[x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n]/\langle x_1y_1 - 1, \ldots, x_ny_n - 1\rangle \simeq k[x_1, \ldots, x_n, y]/\langle x_1 \ldots x_ny - 1\rangle.$$

¿Qué tiene que ver esto con la primera parte del ejercicio?

Ejercicio 2. $(*)$ Sean M, N A-módulos y $f : M \to N$ un morfismo de A-módulos. Dado un conjunto multiplicativo $S \subset A$, sea $S^{-1}f : S^{-1}M \to S^{-1}N$ el morfismo asociado (definido por $S^{-1}f(a/s) = S^{-1}f(a)/s$). Probar que $\mathrm{Ker}(S^{-1}f) = S^{-1}(\mathrm{Ker(f)})$. Luego, si f es inyectiva $S^{-1}f$ lo es. ¿Vale la recíproca?

Ejercicio 3. $(*)$ Si A es un anillo, $S \subset A$ un subconjunto multiplicativo e I un ideal de A, probar que $J^{ec} = \cup_{s \in S}(I : s)$. Vimos que esto implica que los ideales primos de $S^{-1}A$ están en correspondencia biyectiva con los ideales primos de A que no cortan a S.

- Probar el Corolario 3.12 de [A-M]: $\mathrm{nil(S^{-1}A) = S^{-1}nil(A)}$.
- Sea A el anillo $k[x, y]/\langle xy^2\rangle$, $\mathfrak{P} = \langle \overline{y}\rangle$, que es un ideal primo, y $S = S_{\mathfrak{P}} = A \setminus \mathfrak{P}$. Calcular $\mathcal{N}(A), \mathcal{N}(S^{-1}A)$ y verificar la igualdad del Corolario 3.12 en este ejemplo.

Ejercicio 4. (Anillo de fracciones totales:) El conjunto S_0 de todos los elementos que no son divisores del cero de A es un sistema multiplicativo saturado de A. Entonces el conjunto D de los divisores del cero de A es una unión de ideales primos (ver ejercicio 14, capítulo 1 de [A-M]). Probar que todo ideal primo minimal de A está contenido en D. (Usar el ejercicio 6, capítulo 3 de [A-M].)

El anillo $S_0^{-1}A$ se llama el anillo de fracciones totales de A. Probar que:

- S_0 es el subconjunto multiplicativo cerrado más grande de A para el cual $A \to S_0^{-1}A$ es inyectivo;
- todo elemento en $S_0^{-1}A$ es un divisor del cero o una unidad;
- todo anillo en el que todo elemento es una unidad o es un divisor del cero, es igual a su anillo de fracciones totales, i.e, $A \to S_0^{-1}A$ es biyectivo.

Ejercicio 5. Este ejercicio consiste en calcular algunas localizaciones.

- Probar que $A[X]_X$ es isomorfo al anillo de polinomios de Laurent $A[X, X^{-1}]$.

- Para cada primo $p \in \mathbb{Z}$, si $\mathfrak{p} = p\mathbb{Z}$, calcular $\mathbb{Z}_{\mathfrak{p}}$.
- Sea $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pensado como $\mathbb{Z}$-módulo. Para cada primo $\mathfrak{p}$ de $\mathbb{Z}$, calcular $M_{\mathfrak{p}}$.

Ejercicio 6. (**N**) Sea $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ y $\mathfrak{a} = \langle 2, 1+\sqrt{-5}\rangle$.

- Probar que $\mathfrak{a}$ no es principal.
- Probar que para cada $\mathfrak{m} \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ maximal, se tiene que $\mathfrak{a}_{\mathfrak{m}}$ es un $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]_{\mathfrak{m}}$-módulo libre de rango 1.

Ejercicio 7. Sea A un dominio íntegro y M un A-módulo. Un elemento $x \in M$ es un elemento de torsión de M si $Ann(x) \neq 0$, es decir, si $ax = 0$ para algún $a \in A$ no nulo. Probar que los elementos de torsión de M conforman un submódulo de M, llamado el submódulo de torsión de M, que lo notaremos $T(M)$. Si $T(M) = 0$, el módulo M se dice libre de torsión. Probar que:

- Si M es un A-módulo, entonces $M/T(M)$ es libre de torsión.
- Si $f : M \to N$ es un morfismo de módulos, entonces $f(T(M)) \subseteq T(N)$.
- Si $0 \to M' \to M \to M''$ es una sucesión exacta, entonces $0 \to T(M') \to T(M) \to T(M'')$ es exacta.
- Si M es cualquier A-módulo, entonces $T(M)$ es el núcleo de $x \mapsto 1 \otimes x$ de M en $Frac(A) \otimes_A M$.
  Sugerencia: Usar que $Frac(A)$ puede pensarse como un límite de submódulos de tipo finito $(A\xi)_{\xi \in K}$, y que $1 \otimes x = 0$ en $Frac(A) \otimes_A M$ implica que $1 \otimes x = 0$ en algún $A\xi \otimes_A M$ para algún $\xi \neq 0$. Deducir que $\xi^{-1}x = 0$.

Ejercicio 8. Sea S un subconjunto multiplicativo cerrado de un dominio íntegro A. Siguiendo la notación del ejercicio anterior, probar que $T(S^{-1}M) = S^{-1}T(M)$. Deducir que son equivalentes:

- M es libre de torsión.
- $M_{\mathfrak{p}}$ es libre de torsión para todo ideal primo $\mathfrak{p}$.
- $M_{\mathfrak{m}}$ es libre de torsión para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$.

Ejercicio 9. Sean M, N dos A-módulos y $S \subseteq R$ un sistema multiplicativo. Probar que existe un morfismo canónico de $S^{-1}A$-módulos

$$S^{-1}Hom_A(M,N) \to Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N),$$

y que este morfismo es un isomorfismo si M es de presentación finita. Dar un ejemplo donde este morfismo no sea un isomorfismo.

Ejercicio 10. Si $f, g \in A$, S_f, S_g los conjuntos multiplicativos de sus potencias y $\varphi_f : A \to A_f$, $\varphi_g : A \to A_g$ los morfismos naturales, demostrar que existe un morfismo de A-módulos $\psi : A_g \to A_f$ tal que $\varphi_f = \psi \circ \varphi_g$ si y solo si existe $a \in A$ y un natural n tal que $ag = f^n$.

Ejercicio 11. $(*)$ Sea X un espacio topológico. Un *haz de anillos* $\mathcal{F}$ sobre X es una asignación $U \mapsto \mathcal{F}(U)$ para cada $U \subseteq X$ abierto, donde $\mathcal{F}(U)$ es un anillo, junto a una colección de morfismos de anillos $\{\varphi_{UV} : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)\}_{U \subseteq V}$ (llamados *restricciones*) que cumplen las siguientes condiciones:

(1) (Condición de prehaz) Dados $U \subseteq V \subseteq W \subseteq X$ abiertos, tenemos $\varphi_{UW} = \varphi_{UV}\varphi_{VW}$.
(2) (Condición de haz) Dado un abierto $U \subseteq X$, se tiene que para todo $\mathfrak{U} = \{U_i\}_i$ cubrimiento por abiertos de U:
   (a) Si $f, g \in \mathcal{F}(U)$ y cumplen $\varphi_{U_iU}(f) = \varphi_{U_iU}(g)$ para todo $U_i \in \mathfrak{U}$, entonces $f = g$.
   (b) Si para cada $U_i \in \mathfrak{U}$ tenemos un $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tal que $\varphi_{U_{ij}U_i}(f_i) = \varphi_{U_{ij}U_j}(f_j)$ para todo i, j, donde $U_{ij} = U_i \cap U_j$, entonces existe un único $f \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\varphi_{U_iU}(f) = f_i$.

Usualmente denotamos $\varphi_{UV}(f) = f|_U$ y $\mathcal{F}(U) = \Gamma(U, \mathcal{F})$ (que se llaman las secciones de $\mathcal{F}$ sobre U).

Un *espacio anillado* es un par $(X, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ donde X es un espacio anillado y $\mathcal{O}_X$ es un haz de anillos sobre X.

Para todo $x \in X$ se tiene que $\{\Gamma(U, \mathcal{O}_X), \varphi_{UV}\}_{U \leq V}$, donde U, V se mueven sobre los abiertos de X que contienen a x y el orden $U \leq V$ está dado por $V \subseteq U$, es un sistema directo de anillos. Sea entonces $\mathcal{O}_{X,x} := \varinjlim_{x \in U \subseteq X} \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$.

Decimos que un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ es *localmente anillado* si para todo $x \in X$ se tiene $\mathcal{O}_{X,x}$ es un anillo local.

- Probar que $(\mathrm{Spec(A)}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec(A)}})$ es un espacio localmente anillado. Con esta estructura, llamamos a *Spec*(A) un *esquema afín.*
- Si $x \in \mathrm{Spec(A)}$, probar que $\varinjlim_{x\in U} \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec(A)}}) = A_{\mathfrak{p}_x}$.

Nota: este ejercicio está guiado en los ejercicios 23 y 24 de [A-M]. Pueden alternativamente hacer esos dos ejercicios.

Ejercicio 12. (**T**) Sea A un anillo.

- Sea $\varphi : A \to B$ un morfismo de anillos tal que todo elemento $f' \in B$ es de tipo $f' = \varphi(f) \cdot h$ con $f \in A$ y $h \in B^{\times}$ ($B^{\times}$ denota las unidades de B). Probar que el morfismo $\varphi^* : \mathrm{Spec(B)} \to \mathrm{Spec(A)}$ es inyectivo y define un homeomorfismo $\mathrm{Spec(B)} \to \mathrm{Im(f^*)} \subseteq \mathrm{Spec(A)}$, donde $\mathrm{Im(f^*)}$ tiene la topología de subespacio de Spec(A).
- Probar que para todo $\mathfrak{a} \subseteq A$ ideal, la proyección al cociente $A \to A/\mathfrak{a}$ induce un homeomorfismo $V(\mathfrak{a}) \cong \mathrm{Spec(A/\mathfrak{a})}$ mediante el cual podemos darle estructura de esquema afín a $V(\mathfrak{a})$. Observar que como espacios topológicos $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{a}^2)$ pero definen en general esquemas afines no isomorfos.
- Sea $S \subseteq A$ un sistema multiplicativo. Entonces el morfismo canónico $A \to S^{-1}A$ induce un homeomorfismo $\mathrm{Spec(S^{-1}A)} \cong \bigcup_{\mathrm{f}\in \mathrm{S}} \mathrm{X_f} \subseteq \mathrm{Spec(A)}$, pensando a la intersección con la topología de subespacio. Si S está generado por finitos elementos $f_1, \cdots, f_r \in A$, como $\bigcup_{f\in S} X_f = X_{f_1\cdots f_r}$, el homeomorfismo anterior permite darle estructura de esquema afín a los abiertos que son intersección finita de abiertos principales de la forma X_f.
- Dado $x \in \mathrm{Spec(A)}$, sea $k(x) = A_{\mathfrak{p}_x}/\mathfrak{p}_x A_{\mathfrak{p}_x}$ el cuerpo residual de Spec(A) en x. Sea $\varphi : A \to B$ morfismo de anillos. Probar que $\mathrm{Spec(B \otimes_A k(x))}$ es homeomorfo a $(\varphi^*)^{-1}(x)$, con lo que podemos darle estructura de esquema afín a la fibra de un morfismo.