Álgebra Conmutativa

Primer Cuatrimestre 2016

Práctica 3: Adicionales

Ejercicio 1. Pensar cuál debería ser la definición de morfismo de haces y la definición de espacios localmente anillados (recordar que un espacio anillado es un par $(X, \mathcal{O}_X)$ con X espacio topológico, y $\mathcal{O}_X$ un haz de anillos. Decimos que es localmente anillado si los stalks $\mathcal{O}_{X,x}$ son anillos locales.)

Ejercicio 2. Dado un A-módulo M, imitar la construcción de la estructura de espacio localmente anillado de $Spec(A)$ para construir una estructura de haz sobre $Spec(A)$, pero que ahora sea un haz de A-módulos $\tilde{M}$ tal que $\tilde{M}(Spec(A)) = M$. (Los haces de módulos que son de esta forma se dicen cuasi-coherentes).

Ejercicio 3. Sea M un A-módulo y $A \to A'$ un morfismo de anillos. Probar:

- Si M es de tipo finito sobre A, entonces $M \otimes_A A'$ es de tipo finito sobre A'.
- Si M es de presentación finita sobre A, entonces $M \otimes_A A'$ es de presentación finita sobre A'.
- Si M es un A-módulo playo, entonces $M \otimes_A A'$ es un A-módulo playo.
- Si M es un A-módulo fielmente playo, entonces $M \otimes_A A'$ es un A'-módulo fielmente playo.
- Si $A \to A'$ es fielmente playo, probar que valen las implicaciones recíprocas de los ítems anteriores.

Ejercicio 4. Sea M un A-módulo. Probar que son equivalentes:

(a) M es localmente libre de rango finito, es decir, para todo $x \in Spec(A)$ existe $f \in A$ tal que $f \notin A_{\mathfrak{p}_x}$ y $M_f = M \otimes_A A_f$ es un A_f-módulo libre de rango finito.

(b) M es playo y de presentación finita.

(c) M es de presentación finita y $M \otimes_A A_{\mathfrak{m}}$ es libre para todo maximal $\mathfrak{m} \subseteq A$.

Ejercicio 5. Sea M un A-módulo playo de tipo finito. Probar que todas las localizaciones $M \otimes_A A_\mathfrak{m}$ en los ideales maximales $\mathfrak{m} \subseteq A$ son libres de rango finito.

Ejercicio 6. Sea A un anillo y sea $\mathcal{L}(A)$ el conjunto de clases de isomorfismos de A-módulos localmente libres de rango finito.

- Probar que $\mathcal{L}(A)$ es un monoide para la multiplicación dada por el producto tensorial sobre A. Calcular $\mathcal{L}(A)$ para A DIP o local.
- Sea $Pic(A) \subseteq \mathcal{L}(A)$ el grupo de elementos invertibles; se llama el grupo de Picard de A. Probar que $\mathcal{L}(A)$ consiste de los A-módulos localmente libres de rango 1, es decir, consiste de todos los $M \in \mathcal{L}(A)$ tales que $M_\mathfrak{m} \cong A_\mathfrak{m}$ para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subseteq A$.
- Probar que el inverso de todo $M \in Pic(A)$ está dado por $Hom_A(M, A)$.