PRÁCTICA II: IDEALES Y ANILLOS

ÁLGEBRA CONMUTATIVA - 1ER. CUATRIMESTRE 2016

Nota importante:

(1) En toda la práctica, A denota siempre un anillo conmutativo con unidad 1, y k denota un cuerpo. La referencia [A-M] se refiere al libro de Introducción al Álgebra Conmutativa de Atiyah-Macdonald.
(2) El ejercicio que tiene una (**T**) significa que requiere un poco de topología.
(3) El ejercicio que tiene una (**G**) significa que requiere un poco de teoría de Galois.
(4) El ejercicio que tiene una ($\mathbb{C}$) significa que requiere un poco de análisis complejo.
(5) Deben entregar de esta práctica los ejercicios que tienen un $(*)$, más 5 ejercicios a elección. (En total deben entregar 10 ejercicios.)

1. Productos tensoriales

Ejercicio 1. $(*)$ Para todo A-módulo, sea $M[X]$ el conjunto de todos los polinomios en X con coeficientes en M, es decir, expresiones de la forma $\displaystyle\sum_{i=0}^{r} m_i X^i$ con $m_i \in M$. Si le damos a $M[X]$ la estructura de $A[X]$-módulo usual, probar que $M[X]$ es un $A[X]$-módulo y $M[X] \cong A[X] \otimes_A M$.

Ejercicio 2. $(*)$ Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A. Probar que $\mathfrak{p}[X]$ es un ideal primo en $A[X]$. Si $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de A, ¿es $\mathfrak{m}[X]$ un ideal maximal en $A[X]$?

Ejercicio 3. Sea $f : A \to B$ un morfismo de anillos, y sea N un B-módulo. Considerando N como un A-módulo por restricción de escalares, sea $N_B := N \otimes_A B$. Probar que el morfismo de A-módulos $g : N \to N_B$ dado por $y \mapsto 1 \otimes y$ es inyectivo y que $g(N)$ es un sumando directo de N_B.

Sugerencia: Definir $p : N_B \to N$ dada por $p(b \otimes y) = by$, y probar que $N_B = \mathrm{Im(g)} \oplus \mathrm{Ker(p)}$.

Ejercicio 4. Sea A un anillo no nulo.

- Probar que $A^n \cong A^m$ implica que $m = n$.
- Si $\phi : A^m \to A^n$ es suryectiva, probar que entonces $m \geq n$.
- Si $\phi : A^m \to A^n$ es inyectiva, ¿es siempre verdadero que $m \leq n$?

Sugerencia: Reducir los problemas al caso de espacios vectoriales.

Ejercicio 5. $(*)$ Sea A un anillo local, M y N A-módulos de tipo finito. Probar que si $M \otimes_A N = 0$, entonces $M = 0$ o $N = 0$.

Sugerencia: Tensorizar sobre el cuerpo residual de A y reducir el problema al caso de k-espacios vectoriales de dimensión finita.

Ejercicio 6. (*Compatibilidad de productos tensoriales con productos cartesianos*:) Sea $(M_i)_{i \in I}$ una familia de A-módulos y N otro A-módulo. Probar que existe un morfismo canónico de A-módulos

$$\lambda : \left(\prod_{i \in I} M_i \right) \otimes_A N \to \prod_{i \in I} (M_i \otimes_A N),$$

que es un isomorfismo si I es finito. Mostrar que λ no es necesariamente ni inyectivo o suryectivo si I es infinito.

Sugerencia: Tomar $I = \mathbb{N}, A = \mathbb{Z}$ y $N = \mathbb{Q}$. Elegir $p \in \mathbb{N}$ primo y considerar $M_i = \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$. Comprobar que en este caso, λ no es inyectiva. Considerando $M_i = \mathbb{Z}$ para todo i, comprobar que λ no es suryectivo.

Ejercicio 7. (**G**) En lo que sigue, k, K denotan cuerpos.

- Sea K/k una extensión de cuerpos finita no trivial puramente inseparable. Probar que $K \otimes_k K$ no es una k-álgebra reducida. (Recordar que una álgebra reducida es una álgebra que no tiene nilpotentes no nulos.)
- Sea K/k una extensión de cuerpos finita no trivial separable. Probar que $K \otimes_k K$ no es una k-álgebra íntegra. (Recordar que una álgebra íntegra es una álgebra que no tiene divisores del cero no nulos.)
- Sea K/k una extensión de cuerpos finita no trivial separable. Probar que $\mathrm{Spec(K \otimes_k \overline{k})}$ no es conexo: consiste de $[K : k]$ puntos cerrados; $\overline{k}$ denota una clausura algebraica de k.

2. Límites directos

Ejercicio 8. Este ejercicio consiste en calcular algunos límites directos.

- Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una cadena creciente de abiertos de un espacio topológico X. Calcular $\varinjlim_{i\in I} U_i$.
- Probar que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}}$ se puede interpretar como un sistema dirigido y calcular $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Ejercicio 9. ($\mathbb{C}$) Para cada abierto usual $U \subseteq \mathbb{C}$, sea $\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{C}})$ la $\mathbb{C}$-álgebra de funciones holomorfas en U. Dado $x \in \mathbb{C}$, probar que $\{\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{C}})\}_{x\in U\subseteq\mathbb{C}}$ se puede interpretar como un sistema dirigido, con el orden dado por $U \leq V$ si y sólo si $V \subseteq U$. Calcular $\varinjlim_{x\in U\subseteq\mathbb{C}} \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{C}})$.

Ejercicio 10. ($*$) Sea $(M_i)_{i\in I}$ una familia de submódulos de un A-módulo, tal que para todo par de índices $i, j \in I$ existe $k \in I$ tal que $M_i + M_j \subseteq M_k$. Tenemos el orden $i \leq j$ dado por la inclusión $M_i \subseteq M_j$, y $\mu_{ij} : M_i \to M_j$ dado por la inclusión. Probar que

$$\varinjlim_{i\in I} M_i = \sum_{i\in I} M_i = \bigcup_{i\in I} M_i.$$

En particular, todo A-módulo es el límite directo de sus submódulos finitamente generados.

Ejercicio 11. ($*$) Sea $(M_i, \mu_{ij})_{i,j}$ un sistema directo de A-módulos. Entonces $(M_i \otimes_A N, \mu_{ij} \otimes 1)$ es un sistema directo; sea $P = \varinjlim_{i\in I} (M_i \otimes_A N)$. Para cada $i \in I$ tenemos un morfismo $\mu_i \otimes 1 : M_i \otimes_A N \to M \otimes_A N$, luego tenemos un morfismo $\psi : P \to M \otimes_A N$. Probar que ψ es un isomorfismo, con lo que

$$\varinjlim_{i\in I} (M_i \otimes_A N) \cong \left(\varinjlim_{i\in I} M_i\right) \otimes_A N.$$

Ejercicio 12. Probar las siguientes afirmaciones.

- En la categoría de anillos conmutativos con unidad existe el límite directo. Además, si $\varinjlim_{i\in I} A_i = 0$ entonces existe $i \in I$ tal que $A_i = 0$.
- El límite inductivo de dominios íntegros es un dominio íntegro.

3. Platitud

Ejercicio 13. Si M, N, P son A-módulos, probar que $(M \oplus N) \otimes_A P \cong (M \otimes_A P) \oplus (N \otimes_A P)$. Deducir que $M \oplus N$ es playo si y sólo si M y N son playos.

Ejercicio 14. Probar las siguientes afirmaciones.

- Sea M un A-módulo tal que todo submódulo finitamente generado de M es playo. Entonces M es playo.
- Sea M un A-módulo con A dominio íntegro, tal que $\mathrm{Ann(M) = \{a \in A : aM = 0\}}$ es no nulo. Entonces M no es playo.

Ejercicio 15. Sea $k[X, Y]$ el anillo de polinomios sobre k en dos variables. Probar que $\langle X\rangle, \langle Y\rangle, \langle XY\rangle$ son $k[X, Y]$-módulos fielmente playos, pero que el ideal $\langle X, Y\rangle$ no es playo.

Sugerencia: Existe una sucesión exacta canónica de $k[X, Y]$-módulos

$$0 \to \langle XY\rangle \to \langle X\rangle \oplus \langle Y\rangle \to \langle X, Y\rangle \to 0.$$

Ejercicio 16. Sea $\phi : A \to A'$ un morfismode anillos playo. Probar que ϕ es fielmente playo si y sólo si $\phi^* : \mathrm{Spec(A')} \to \mathrm{Spec(A)}$ es suryectivo.

Ejercicio 17. Sea $(M_i)_{i\in I}$ una familia de A-módulos y N un A-módulo de presentación finita. Probar que el morfismo canónico $\lambda : \left(\prod_{i\in I} M_i\right) \otimes_A N \to \prod_{i\in I}(M_i \otimes_A N)$ es un isomorfismo.

Ejercicio 18. Sean M, N dos A-módulos con N fielmente playo. Probar que M es playo (resp. fielmente playo) si y sólo si $M \otimes_A N$ es playo (resp. fielmente playo).

Ejercicio 19. Para un morfismo de anillos $\phi : A \to A'$ consideremos un A'-módulo M' fielmente playo, como así $M'_{/A}$ su restricción por escalares a A mediante ϕ. Probar que $M'_{/A}$ es un A-módulo playo (resp. fielmente playo) si y sólo si $\phi : A \to A'$ es playo (resp. fielmente playo).