Álgebra Conmutativa

Primer Cuatrimestre 2016

Práctica 2: Adicionales

Ejercicio 1. Sea
$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$
una sucesión exacta de A-módulos.

- Probar que si M es de tipo finito, entonces M'' es de tipo finito, mientras que M' no necesariamente es de tipo finito.
- Probar que si M' y M'' son de tipo finito, entonces M es de tipo finito.
- Probar que si M' y M'' son de presentación finita, entonces M es de presentación finita.

Ejercicio 2. Sea M un A-módulo. Son equivalentes:

- M es de presentación finita.
- M es de tipo finito y para todo morfismo de A-módulos $\varphi : M' \to M$ suryectivo con M' de tipo finito, se tiene que $ker(\varphi)$ es de tipo finito.

Ejercicio 3. Probar que una sucesión
$$M \to M' \to M'' \to 0$$
de A-módulos es exacta si y sólo si la sucesión
$$0 \to Hom_A(M'', N) \to Hom_A(M, N) \to Hom_A(M', N)$$
es exacta para todo A-módulo N.

Ejercicio 4. Probar que el funtor $- \otimes_A N$ es exacto a derecha.

Ejercicio 5. Probar las fórmulas de adjunción:

- $Hom_A(M \otimes_A N, L) \cong Hom_A(M, Hom_A(N, L))$.
- Si tenemos un morfismo de anillos $\varphi : A \to A'$ y N un A'-módulo, probar
$$Hom_{A'}(M \otimes_A A', N) \cong Hom_A(M, N_{/A}).$$

Ejercicio 6. Sea M un A-módulo y $\mathfrak{a} \subseteq A$ un ideal. Probar que existe un isomorfismo canónico $M \otimes (A/\mathfrak{a}) \cong M/\mathfrak{a}M$.

Ejercicio 7. Consideremos un sistema proyectivo $(M_i, \varphi_{ij})_{i\leq j}$ de A-módulos indexado en los naturales. Definimos el morfismo $\theta : \prod_n M_n \to \prod_n M_n$ dado por $\theta((x_n)_n) := (q_n - \varphi_{n(n+1)(q_{n+1})})_n$.

- Probar que $ker(\theta) \cong \varprojlim_n M_n$.

Notamos $\varprojlim^1_n M_n = coker(\theta)$. Decimos que el sistema proyectivo $(M_{i,\varphi_{ij})_{i\leq j}}$ verifica la **condición de Mittag-Leffer** si para todo n la cadena decreciente

$$M_n \supseteq \varphi_{n(n+1)}(M_{n+1}) \supseteq \varphi_{n(n+2)}(M_{n+2}) \supseteq \cdots \supseteq \varphi_{nm}(M_m) \supseteq \cdots$$

se estaciona, es decir, existe $m > 0$ tal que $\varphi_{nm}(M_m) = \varphi_{n(m+k)}(M_{m+k})$ para todo $k > 0$.

- Asumamos que para todo $m > n$ se tiene $\varphi_{nm} = 0$. Probar que $\varprojlim^1_n M_n = 0$.
- Asumamos que φ_{nm} es suryectiva para todo $m > n$. Probar que $\varprojlim^1_n M_n = 0$.
- Asumamos que $(M_n, \varphi_{ij})_{i\leq j}$ satisface la condición de Mittag-Leffer. Sea $P_n := \bigcap_{m\geq n} \varphi_{nm}(M_m)$. Probar que $\varphi_{n(n+1)}(P_{n+1}) = P_n$.
- Asumamos que $(M_i, \varphi_{ij})_{i\leq j}$ cumple la condición de Mitagg-Leffer. Probar que $\varprojlim^1_n M_n = 0$.
- Probar que el el funtor $\varprojlim_n$ que sale de la categoría de sistemas proyectivos en la categoría de A-módulos es exacto a izquierda, y probar que es exacto si el primer sistema proyectivo de la sucesiíon exacta cumple la condición de Mittag-Leffer.