PRÁCTICA I: IDEALES Y ANILLOS

ÁLGEBRA CONMUTATIVA - 1ER. CUATRIMESTRE 2016

Nota importante:

(1) En toda la práctica, A denota siempre un anillo conmutativo con unidad 1, y k denota un cuerpo. La referencia [A-M] se refiere al libro de Introducción al Álgebra Conmutativa de Atiyah-Macdonald.
(2) Deben entregar de esta práctica los ejercicios que tienen un $(*)$, más un ejercicio de cada sección que no sea de los ejercicios anteriores. (En total deben entregar 14 ejercicios.)
(3) El ejercicio que tiene una (**T**) significa que requiere un poco de topología.

1. Generalidades de anillos e ideales

Ejercicio 1. Consideremos el morfismo $f : k[X, Y] \to k[t]$ definido por $f(X) = t$ y $f(Y) = q(t)$ con $q(t) \in k[t]$. Calcular $\ker(f)$.

Ejercicio 2. $(*)$ Consideremos el morfismo de anillos $f : k[X, Y] \to k[t]$ definido $f(X) = t^2$ y $f(Y) = t^3$. Probar que $\ker(f) = \langle x^3 - y^2 \rangle$ y que $k[X, Y]/\langle x^3 - y^2 \rangle$ es un dominio íntegro.
Sugerencia: probar que $k[X, Y]/\langle x^3 - y^2 \rangle$ es isomorfo a $k[t^2, t^3]$.

Ejercicio 3. Decidir si existe un anillo conmutativo con unidad A tal que posee un único ideal primo no nulo.

Ejercicio 4. $(*)$ Probar que todo anillo conmutativo con 1 no nulo tiene ideales primos minimales respecto de la inclusión. Encontrar todos los primos minimales del anillo $k[X, Y]/\langle xy \rangle$.

Ejercicio 5. Probar las siguientes afirmaciones.

- Sea A un anillo tal que para todo elemento $x \in A$ existe un entero $n = n(x) > 1$ tal que $x^n = x$. Entonces todo ideal primo de A es maximal.
- Un anillo local no contiene elementos idempotentes distintos de 0 y 1. (Recordar que $x \in A$ es idempotente si $x^2 = x$.)

Ejercicio 6. Un anillo A se dice *Booleano* si $x^2 = x$ para todo $x \in A$. En un anillo Booleano A, probar que

- $2x = 0$ para todo $x \in A$;
- todo ideal primo $\mathfrak{p}$ es maximal, y $A/\mathfrak{p}$ es un cuerpo con dos elementos;
- todo ideal finitamente generado en A es principal.

2. Radicales.

Ejercicio 7. $(*)$ Sea I un ideal de A y consideremos la aplicación canónica $\phi_I : A \to A/I$. Dado que ϕ_I es un morfismo de anillos, es posible interpretar en este contexto la extensión y contracción de ideales.

- Calcular $(J^e)^c$ para todo ideal J en A y $(J'^c)^e$ para todo ideal J' en A/I.
- Probar que existe una correspondencia biyectiva entre ideales primos de A que contienen a I e ideales primos del anillo A/I.
- Probar que un ideal I de A verifica que $I = \sqrt{I}$ (en cuyo caso se dice que I es radical) si y sólo si I es intersección de ideales primos.

Ejercicio 8. $(*)$ Probar que si I, J son ideales de A, entonces

$$\sqrt{I + J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}.$$

Dar un ejemplo en $\mathbb{Z}[x]$ de dos ideales radicales tales que su suma no sea radical.

Ejercicio 9. Sea A un anillo y $A_{red} = A/\mathrm{nil(A)}$. Probar que A_{red} es reducido y que todo morfismo de anillos $A \to A'$ con A' reducido se factoriza a través de un único morfismo de anillos $A_{red} \to A'$.

Ejercicio 10. Sea $A = k[X,Y]/\langle X - XY^2, Y^3\rangle$. Si $\overline{X}, \overline{Y}$ son las clases residuales de X e Y, probar que $\mathrm{nil(A)} = \langle \overline{\mathrm{X}}, \overline{\mathrm{Y}}\rangle$ es el único ideal primo de A y probar que $A_{red} \cong k$.

Ejercicio 11. $(*)$ Supongamos que $b = a + n$, con $a, b, n \in A$ y n nilpotente. Probar que b es una unidad si y solo si a es una unidad.

Ejercicio 12. $(*)$ Sea A un anillo y sea $A[X]$ el anillo de polinomios en la variable X, con coeficientes en A. Sea $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$. Probar que:

- f es una unidad en $A[X]$ si y sólo si a_0 es una unidad en A y $a_1, \cdots, a_n$ son nilpotentes. (Si $\sum_{i=1}^{m} b_i X^i$ es la inversa de f, probar por inducción en r que $a_n^{r+1} b_{m-r} = 0$. Concluir que a_n es nilpotente, y luego usar el ejercicio anterior.)
- f es nilpotente si y sólo si a_i es nilpotente para todo i.
- f es un divisor del cero si y sólo si existe $a \neq 0$ en A tal que $af = 0$. (Elegir $g = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i$ de grado mínimo m tal que $fg = 0$. Entonces $a_n b_m = 0$, luego $a_n g = 0$. Probar por inducción que $a_{n-r} g = 0$ para $0 \leq r \leq n$.)
- Todo polinomio mónico de $A[X]$ no es divisor del cero.
- f se dice primitivo si $\langle a_0, \cdots, a_n\rangle = \langle 1\rangle$. Si $f, g \in A[X]$, probar que fg es primitivo si y sólo si f y g son primitivos.

Ejercicio 13. Sea A un anillo y sea $A[[X]]$ el anillo de series formales $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ con coeficientes en A. Probar que:

- f es una unidad en $A[[X]]$ si y sólo si a_0 es una unidad en A.
- Si f es nilpotente, entonces a_n es nilpotente para todo $n \geq 0$. Decidir si vale la recíproca.
- f pertenece al radical de Jacobson de $A[[X]]$ si y sólo si a_0 pertenece al radical de Jacobson de A.
- La contracción de un ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $A[[X]]$ es un ideal maximal de A y $\mathfrak{m}$ está generado por $\mathfrak{m}^c$ y X.
- Todo ideal primo de A es una contracción de un ideal primo de $A[[X]]$.

3. Espectro de un anillo

Ejercicio 14. $(*)$ Sea $f : A \to B$ un morfismo de anillos. Probar que $f^* : \mathrm{Spec(B)} \to \mathrm{Spec(A)}$ es una función continua.

Ejercicio 15. Sea $\mathcal{M} = \langle X\rangle$ el ideal de $k[X]$. Calcular el espectro de los cocientes $\mathrm{Spec(k[X]/\mathcal{M}^n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 16. (**T**) Estudiar Spec(A), para:

- $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$, donde para cada i, se tiene que A_i es un anillo conmutativo con unidad.
- A un anillo conmutativo con unidad, finito. En este caso, $Spec(A)$ es finito. ¿Es siempre discreto?
- $A = A'/\mathrm{nil(A')} = \mathrm{A'_{red}}$, donde A' es un anillo conmutativo con unidad.

Ejercicio 17. $(*)$ Para cada $f \in A$, sea X_f el complemento de $V(f)$ en $X = \mathrm{Spec(A)}$. Los conjuntos X_f son abiertos. Probar que conforman una base de abiertos para la topología Zariski, y que:

- $X_f \cap X_g = X_{fg}$;
- $X_f = \emptyset$ si y sólo si f es nilpotente;

- $X_f = X$ si y sólo si f es una unidad;
- $X_f = X_g$ si y sólo si $\sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$;
- X es cuasi-compacto (es decir, todo cubrimiento por abiertos admite un subcubrimiento finito);
- X_f es cuasi-compacto;
- un abierto de X es cuasi-compacto si y sólo si es una unión finita de conjuntos de la forma X_f.

Nota: los $\{X_f\}_{f\in A}$ se dicen que son una base de abiertos básicos de Spec(A).

Ejercicio 18. $(*)$ Sea $x \in$ Spec(A) un ideal primo. Vamos a notar $\mathfrak{p}_x$ a x cuando lo pensamos como ideal de Spec(A). Probar que:

- $\{x\}$ es cerrado en Spec(A) si y sólo si $\mathfrak{p}_x$ es maximal;
- $\overline{\{x\}} = V(\mathfrak{p}_x)$;
- $y \in \overline{\{x\}}$ si y sólo si $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y$;
- $Spec(A)$ es un espacio T_0 (es decir, si x, y son dos puntos distintos de Spec(A), entonces o bien existe un entorno de x que no contiene a y, o existe un entorno de y que no contiene a x).

Ejercicio 19. $(*)$ Un espacio topológico X se dice irreducible si $X \neq \emptyset$ y si todo par de abiertos no vacíos en X se intersecan, o equivalentemente, si todo abierto no vacío es denso en X. Adicionalmente, esto es equivalente a que X no puede escribirse como la unión de dos subconjuntos cerrados propios.

- Sea I un ideal de A. Probar que $\sqrt{I}$ es un ideal primo si y sólo si $V(I)$ es irreducible.
- . Probar que $Spec(A)$ es irreducible si y sólo si $nil(A)$ es un ideal primo.

Ejercicio 20. (**T**) Probar que son equivalentes:

- $X =$ Spec(A) es disconexo.
- $A \cong A_1 \times A_2$ donde ni A_1 o A_2 son el anillo trivial.
- A contiene un idempotente distinto de 0 y 1.

En particular, el espectro de un anillo local es siempre conexo.

Ejercicio 21. $(*)$ Una función polinomial $\phi : k^n \to k^m$ es una función de la forma $\phi(x) = (f_1(x), \cdots, f_m(x))$, donde $f_1, \cdots, f_m \in k[t_1, \cdots, t_n]$. Sean X, Y variedades algebraicas afines en k^n, k^m respectivamente. Una función $\varphi : X \to Y$ se dice regular si existe $\phi : k^n \to k^m$ función polinomial tal que φ es la restricción a X de ϕ.

Sea $\varphi : X \to Y$ una función regular. Si $\eta : Y \to k$ es una función regular en Y, entonces $\eta\circ\varphi : X \to k$ es una función regular en X. Luego φ induce un morfismo de k-álgebras $k[Y] \to k[X]$, explícitamente $\eta \mapsto \eta \circ \varphi$. Probar que de esta manera obtenemos una correspondencia 1-1 entre morfismos regulares $X \to Y$ y morfismos de k-álgebras $k[Y] \to k[X]$.